

LEVYJÄYKISTYKSEN LASKENTAMENETELMIEN KEHITTÄMINEN
Minna Brockmann

Teknillisen korkeakoulun rakenne- ja
rakennustuotantotekniikan laitoksella professori
Jukka Aallon valvonnassa tehty diplomityö.

Espoo 24.9.2009

Tekijä:	Minna Brockmann		
Diplomityö:	Levyjäykistys laskentamenetelmien kehittäminen		
Päivämäärä	24.9.2009	Sivumäärä:	94+77
Professuuri:	Rakenteiden mekaniikka	Koodi:	Rak-54
Valvoja:	Prof. Jukka Aalto		
Ohjaaja:	TkT Jyrki Kesti		
Avainsanat:	levyjäykistys, joustavuus, Timoshenko –palkki, siirtymä, katelevy		

Työn tavoitteena on kehittää menetelmiä levyjäykistetyn rakennuksen vaakasuuntaisen siirtymätilan hallintaan. Pääpaino on menetelmissä, jotka voidaan sisällyttää olemassa olevaan levyjäykistys laskentasuunnitelmaan.

Suorakaiteen muotoisen jäykisteen osan voidaan olettaa toimivan levyn tasossa kuten Timoshenko –palkki, jonka taivutus- ja leikkausjäykkyyksien B ja S määrittäminen on yksi työn keskeinen tavoite. Tässä työssä levyjäykisteen taivutus- ja leikkausjäykkyydet määritetään eurooppalaisten metallilevyjäykistesuosituksen mukaisesti.

Toinen työn keskeinen osa on yksinkertaisten kaavojen ja algoritmien kehittäminen suorakaiteen muotoisen levyjäykistetyn katon siirtymien määrittämiseksi. Kehitetään kaavat tasaisen kuorman ja tasavälisten pistekuormien kuormittaman katon siirtymien määrittämiseksi sekä yksinkertaiset laskenta-algoritmit epätasavälisten pistekuormien kuormittaman katon siirtymien määrittämiseksi erilaisissa katon tuentatapauksissa. Tarkastellaan Timoshenko –palkin analyttiseen ratkaisuun perustuvaa tarkkaa palkkielementtiä ja esitetään elementtimenetelmään perustuva yksinkertainen levyjäykistetyn katon laskenta-algoritmi.

Työssä tarkastellaan myös jäykistävien kehien vaikutusta yksikerroksisen levyjäykistetyn rakennuksen siirtymiin. Näissä tarkasteluissa kehät mallinnetaan jousina, joiden jousivakioiden laskemiseksi työssä on esitetty taulukko. Kehitetään sekä yleiseen voimamenetelmään että elementtimenetelmään perustuvat algoritmit, joilla kehillä jäykistetyn yksikerroksisen katon siirtymätila voidaan määrittää. Kehitetään myös kimmoisalla alustalla olevan Timoshenko palkin teoriaan perustuvat likikaavat, joilla voidaan arvioida kehillä jäykistetyn katon taipuman suuruutta.

Työssä tarkastellaan kuinka Timoshenko –palkkiteoriaan perustuvaa ajattelutapaa voidaan laajentaa soveltumaan useampikerroksisten rakennusten jäykistämisen mallintamiseen. Kehitetään erityiset kehä-, levy- ja ristikkojäykiste-elementit, joita voidaan käyttää sekä vaaka- että pystytasossa olevien jäykisteiden toiminnan kuvaamiseen. Työssä esitellään myös lyhyesti elementtimenetelmään perustuva laskenta-algoritmi, jolla voidaan määrittää kehillä, levyillä ja ristikoilla jäykistetyn useampikerroksisen rakennuksen siirtymätila.

Laskenta-algoritmien luotettavan toiminnan varmistamiseksi kehitettiin MATLAB –ympäristössä malliohjelmat, joiden toimivuutta on testattu laskentaesimerkein. Tulosten esitystapa on organisoitu siten, että kaavat ja algoritmit sekä niiden taustalla olevat fysikaaliset perusteet on sisällytetty työn runko-osaan. Sen loppupäähän on myös sijoitettu työssä esitetyt laskentaesimerkit. Yksityiskohtaiset teoreettiset tarkastelut ja kaavojen johdot sekä malliohjelmat on sijoitettu laajahkoon liiteosaan.

Author:	Minna Brockmann		
Thesis:	On stressed skin diaphragm design with special reference to displacement		
Date:	24.9.2009	Number of pages:	94+77
Professorship:	Structural Mechanics	Code:	Rak-54
Supervisor:	Prof. Jukka Aalto		
Instructor:	Tkt Jyrki Kesti		
Keywords:	Stressed skin diaphragm, flexibility, Timoshenko beam, displacement, sheeting		

Aim of this master's thesis is to develop methods in stressed skin diaphragm design. The main issue is to define deflections such way that they can be coded to the existing program by Rautaruukki Oyj.

Stressed skin diaphragm is supposed to act like Timoshenko –beam. Defining the bending stiffness and shear stiffness is one of the essential points of the thesis. They are defined according to European Recommendations for the Application of Metal Sheeting acting as a Diaphragm.

Another essential point is to find out equations and algorithms for defining the deflections of the diaphragm. Introduced loading cases as distributed load, equally spaced equal point loads and unequally spaced point loads. The diaphragm is handled in every case both as a simply supported beam and as a cantilever beam. A beam element, which is based on analytical Timoshenko –beam solution, is considered and a simple algorithm, which is based on the finite-element method, is introduced.

The effect of frames is also considered in this thesis. The frames are supposed to act like springs, which have a certain spring constant. Equations for the spring constants in different cases are introduced on a table. Such algorithms are developed, that deflections of a one-storey stiffened building is possible to define. These algorithms are based on the general force-method and the finite-element method. Novel approximate formulas for estimating the maximum deflection of a diaphragm roof stiffened by frames are also presented. They are based on the theory of a Timoshenko beam on an elastic foundation.

In this thesis it is also investigated, how Timoshenko beam theory can be used in multi-storey buildings. Special frame-, sheet- and truss-elements are defined and they can be used both as vertical and horizontal stiffeners. Algorithms based on the finite-element method, which can be used to define deformed state of a multi-storey building stiffened by frames, sheets and trusses are also introduced shortly.

MATLAB –programs were further developed to ensure the reliability of algorithms. The proper working of these programs has been checked by the example problems of this work. The contents of this thesis are organized so that equations, algorithms and their physical basics are presented in the main part of the work. The examples can also be found in the end of the main part. Theoretical evaluations, detailed equations and MATLAB –programs are presented in the appendixes.

SISÄLLYSLUETTELO

SISÄLLYSLUETTELO.....	4
Esipuhe	7
1. Johdanto	8
2. Timoshenko palkki.....	10
2.1 Timoshenko palkin yhtälöt.....	10
2.2 Timoshenko –palkin momenttipintamenetelmä	12
3. Levyjäykistys järekkyyksien arviointi.....	16
3.1 Taivutusjäykkyyden arviointi.....	17
3.2 Leikkausjäykkyyden arviointi	19
3.21 Leikkausjäykkyyden arviointi ECCS –menetelmällä	19
3.22 ECCS –menetelmän saattaminen ohjelmointiin sopivaksi	25
3.23 Malliohjelma leikkausjoustavuuden määrittämiseksi (MATLAB).....	34
3.24 Leikkausjoustavuuden arviointi Höglundin käyrästäön avulla.....	34
4. Levyjäykistys Timoshenko –palkkina	36
4.1 Päädyistä ja yhdeltä pitkältä sivulta jäykistetty katto	36
4.11 Rakennemalli	36
4.12 Kuormitukset.....	36
4.13 Analyttinen ratkaisu tasaiselle kuormalle	37
4.14 Analyttinen ratkaisu tasavälisille pistekuormille	37
4.15 Yksinkertainen laskenta-algoritmi epätasavälisille pistekuormille.....	38
4.2 Yhdestä päädyistä ja pitkältä sivulta jäykistetty katto	40
4.21 Rakennemalli	40
4.22 Kuormitukset.....	40
4.23 Analyttinen ratkaisu tasaiselle kuormalle	41
4.24 Yksinkertainen laskenta-algoritmi epätasavälisille pistekuormille.....	42
5. Tarkka elementtimenetelmä Timoshenko -palkin ratkaisemiseksi.....	45
5.1 Yhtälöt ja laskelman periaate	45

5.11 C^1 -jatkuvan Timoshenko -palkkielementin jäykkyyismatriisi ja kuormitusvektori	45
5.12 Rakenteen jäykkyyismatriisin ja kuormitustermivektorin kokoamisprosessi	46
5.13 Elementtien sisäisten suureiden laskeminen	46
5.2 Malliohjelma (MATLAB).....	47
5.21 Lähtötieto-ohjelmat	47
5.22 Laskentaohjelma	48
Jälkikäsitellyohjelma tulosten esittämiseksi graafisesti	Error! Bookmark not defined.
6. Kehien jäykkyyden vaikutus yksikerroksisen rakennuksen siirtymiin	52
6.1 Kehä jousena	52
6.2 Likimääräiskaavat pilarien jäykkyyden vaikutuksen arvioimiseksi	55
6.3 Laskentamallit pilarien jäykkyyden vaikutuksen arvioimiseksi	58
6.31 Kimmoisilla tuilla olevan Timoshenko palkin ratkaiseminen voimamenetelmällä	58
6.32 Kimmoisilla tuilla olevan Timoshenko palkin ratkaiseminen elementtimenetelmällä	61
6.33 Kimmoisen tuennan tuomat muutokset malliohjelmaan.....	62
7. Jäykiste-elementteihin perustuva useampikerroksisen rakennuksen rakennemalli	65
7.1 Jäykiste-elementteihin perustuva rakennemalli	65
7.2 Jäykiste-elementit.....	66
7.21 Ristikkojäykiste-elementti	66
7.22 Levyjäykiste-elementti.....	68
7.23 Kehäjäykiste-elementti.....	68
7.3 Rakennemallin muodostuminen jäykiste-elementeistä	70
7.4 Malliohjelma (MATLAB).....	72
7.41 Lähtötieto-ohjelmat	72
7.42 Laskentaohjelma	74
7.43 Jälkikäsitellyohjelma tulosten esittämiseksi graafisesti	74
8. Levyjäykistys laskentamenetelmien vertailu esimerkkien avulla	75

8.1 Tavoitteet.....	75
8.2 Esimerkit	75
Esimerkki 1	75
Esimerkki 2	77
Esimerkki 3	81
Esimerkki 4	82
Esimerkki 5	87
8.3 Johtopäätökset	90
9. Loppupäätelmät.....	92

Esipuhe

Tämä diplomityö on tehty Teknillisessä korkeakoulussa (TKK) Rautaruukki Oyj:lle. Haluan kiittää molempia tahoja tilaisuudesta tämän haastavan ja mielenkiintoisen työn suorittamiseen sekä lisäksi TKK:ta työkaluista, jotka mahdollistivat laskennallisten osuuksien suorittamisen.

Diplomityön ohjausryhmässä on toiminut TkT Jyrki Kesti (Rautaruukki Oyj), DI Jukka Lindborg (Rautaruukki Oyj) ja professori Jukka Aalto (TKK). Heille haluan osoittaa kiitokseni arvokkaasta palautteesta, asiantuntijaosaamisesta ja työn ohjauksesta.

Lisäksi haluan kiittää sisartani ja opiskelutovereitani vertaistuesta sekä perhettäni henkisestä tuesta ja kannustuksesta.

Erityisesti haluan kiittää Jumalaa siitä viisaudesta, jota tarvitsin tämän diplomityön valmiiksi saattamiseen.

”Jos kuitenkin joltakulta teistä puuttuu viisautta, pyytäköön sitä Jumalalta. Hän on saava pyytämänsä, sillä Jumala antaa auliisti kaikille, ketään soimaamatta.”

Jaak. 1:5

Espoossa, elokuussa 2009

Minna Brockmann

1. Johdanto

Tämän diplomityön tavoitteena on tutkia levyjäykistetyin katon vaikutusta rakenteen vaakasuuntaiseen siirtymään ja kehittää laskentaan kaavat, jotka voidaan ohjelmoida olemassa olevaan Rautaruukki Oyj:n ohjelmaan. Levyjäykistettyä käsitellään Timoshenko –palkkiteorian avulla, jolloin huomioidaan sekä taivutuksen että leikkauksen vaikutus rakenteen taipumaan. Näin ollen yhtenä työn keskeisenä ongelmana on levyjäykisteen taivutus- ja leikkausjäykkyyden määrittäminen. Lähtökohtana näiden selvittämiseksi on käytetty eurooppalaisia suosituksia (ECCS 1995), jotka pohjautuvat J. M. Daviesin ja E. R. Bryanin tutkimuksiin levyn joustavuudesta.

Kappaleessa 2 esitellään Timoshenko –palkkiteoria. Lisäksi esitellään kyseiseen teoriaan perustuva momenttipintamenetelmä, jolla voidaan laskea staattisesti määrättyjen palkkien taipumia ja kiertymiä halutuissa pisteissä.

Kappaleessa 3 käsitellään jäykistepalkin taivutus- ja leikkausjäykkyyden laskemista. ECCS –menetelmässä tarkastelu perustuu eri tekijöistä aiheutuvien leikkausjoustavuuskertoimien käyttöön, joiden summana saadaan koko jäykisteleivyn leikkausjoustavuus c . Näihin kertoimiin sisältyy myös taivutusjoustavuus. Tässä diplomityössä joustavuuksien sijasta käytetään kuitenkin Timoshenko –palkkimallille luontevampia suureita, taivutusjäykkyyttä B ja leikkausjäykkyyttä S . Lisäksi esitellään MATLAB -ympäristössä kehitetty ohjelma, jolla jäykistepalkin leikkausjoustavuus voidaan laskea.

Kappaleessa 4 johdetaan yksinkertaiset kaavat palkin taipumalle erilaisissa tuenta- ja kuormitustapauksissa. Tuentatapauksina käsitellään kaksitukinen palkki ja ulokemainen palkki, joka on päästään vapaasti ja tietyllä etäisyydellä tästä päästä kiertymättömäksi tuettu. Kuormitustapauksina käsitellään tasainen kuorma, tasaväliset vakiosuuruiset pistekuormat ja epätasaväliset pistekuormat. Jälkimmäisen tapauksen ratkaisemiseksi esitetään yksinkertainen laskenta-algoritmi, jonka toiminnan varmistamiseksi on kehitetty MATLAB -ohjelma.

Kappaleessa 5 esitellään tarkka elementtimenetelmä Timoshenko –palkin ratkaisemiseksi. Yksittäiselle elementille johdetaan jäykkyydmatriisi ja kuormitusvektori, joista voidaan

koota koko rakenteen jäykkyyismatriisi ja kuormitusvektori. Lisäksi esitellään, miten elementtimenetelmä soveltuu MATLAB –ympäristöön.

Kappaleessa 6 tutkitaan kehien vaikutusta rakenteen taipumaan. Aluksi esitellään ECCS:n käyttämä likimääräismenetelmä käsin laskentaan. Sitten johdetaan kimmoisalla alustalla olevan palkin teoriaan perustuvat likimääräiskaavat, joilla voidaan arvioida kehien vaikutusta taipumaan. Lopuksi käsitellään yksinkertainen voimamenetelmään perustuva laskentamenetelmä ja elementtimenetelmän vaatimat muutokset tapauksessa, jossa kehien vaikutus otetaan huomioon.

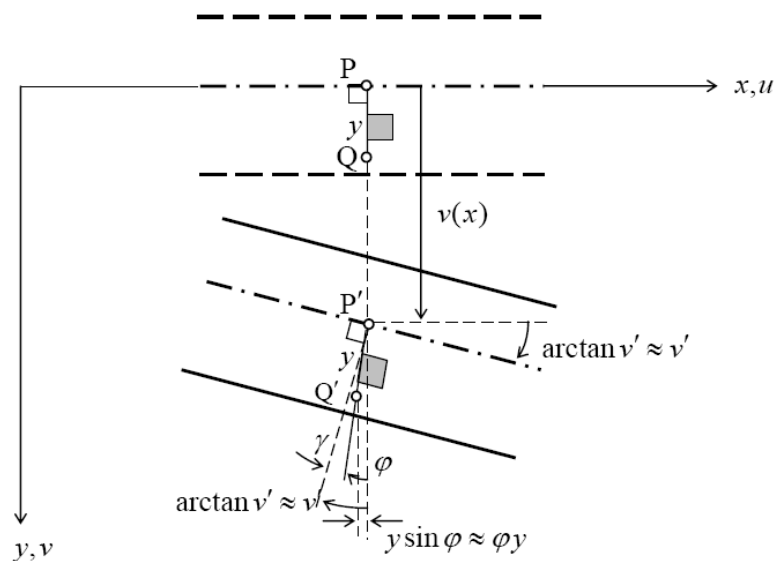
Kappaleessa 7 esitellään ristikko- ja kehäelementit, joita voidaan hyödyntää elementtimenetelmään perustuvassa ohjelmassa, jos halutaan käsitellä useampikerroksista rakennusta. Lisäksi esitellään malliohjelmiesimerkki MATLAB –ympäristössä.

Kappaleeseen 8 on kerätty esimerkkejä eri lähteistä ja käsitelty niitä edellisissä kappaleissa esitetyillä menetelmillä. Näin on voitu vertailla tuloksia eri menetelmien välillä sekä varmistua kehitettyjen menetelmien luotettavuudesta vertaamalla tuloksia lähteisiin.

2. Timoshenko palkki

2.1 Timoshenko palkin yhtälöt

Sauvarakenteen muodonmuutos käsittää kaksi osaa: taivutusmomentista aiheutuvan muodonmuutoksen ja leikkausvoimasta aiheutuvan muodonmuutoksen. Teknisessä taivutusteoriassa eli Bernoullin palkkiteoriassa leikkausmuodonmuutos jätetään huomiotta, ja usein tämä teoria soveltuukin käytettäväksi rakenteille, joiden leikkausjäykkyys on niin suuri, että se vaikuttaa kokonaismuodonmuutokseen vain hyvin vähän. Levyjäykistetyissä kattorakenteissa leikkausjäykkyys sen sijaan on taivutusjäykkyyteen verrattuna hyvin pieni, joten niiden osalta on syytä soveltaa Timoshenko –palkkiteoriaa, joka huomioi leikkauksen aiheuttamat muodonmuutokset (Zenkert 2007, s. 49).



Kuva 2.1: Palkin muodonmuutos Timoshenko –palkkiteoriassa (Aalto 2008, s.223)

Bernoulli –palkkiteoriassa oletetaan, että palkin akselia vastaan kohtisuora materiaalijana PQ säilyy suorana ja palkin muuttunutta akselia vastaan kohtisuorana jana $P'Q'$ muodonmuutoksen jälkeen. Timoshenko –palkkiteoriassa oletetaan myös, että palkin akselia vastaan kohtisuora materiaalijana PQ säilyy suorana jana $P'Q'$, mutta tämä jana ei enää pysy kohtisuorassa palkin muuttunutta akselia vastaan, vaan poikkeaa tästä suunnasta kulman γ verran. Kuvasta 2.1 saadaan yhteys

$$v'(x) = \varphi(x) + \gamma(x), \quad (2.1)$$

missä $v(x)$ on palkin taipuma, $\varphi(x)$ on kiertymä ja $\gamma(x)$ on liukumakulma.

Pisteen Q aksiaaliselle siirtymälle saadaan kuvan 2.1 perusteella

$$u(x) = -\varphi(x)y, \quad (2.2)$$

jota käyttäen saadaan venymälle $\varepsilon_x = \partial u / \partial x$ tulos

$$\varepsilon_x(x, y) = \kappa(x)y, \quad (2.3)$$

missä

$$\kappa(x) = -\varphi'(x) \quad (2.4)$$

on käyritymä.

Timoshenko –palkille taivutusmomentin M ja käyritymän κ yhteys esitetään muodossa

$$M = B\kappa \Leftrightarrow \kappa = \frac{M}{B}, \quad (2.5)$$

missä B on palkin taivutusjäykkyys.

Timoshenko –palkin leikkausvoiman Q ja liukumakulman γ yhteys esitetään muodossa

$$Q = S\gamma \Leftrightarrow \gamma = \frac{Q}{S}, \quad (2.6)$$

missä S on palkin leikkausjäykkyys.

Lausekkeista (2.4) ja (2.5) saadaan

$$\varphi' = -\frac{M}{B} \quad (2.7)$$

sekä lausekkeista (2.1) ja (2.6)

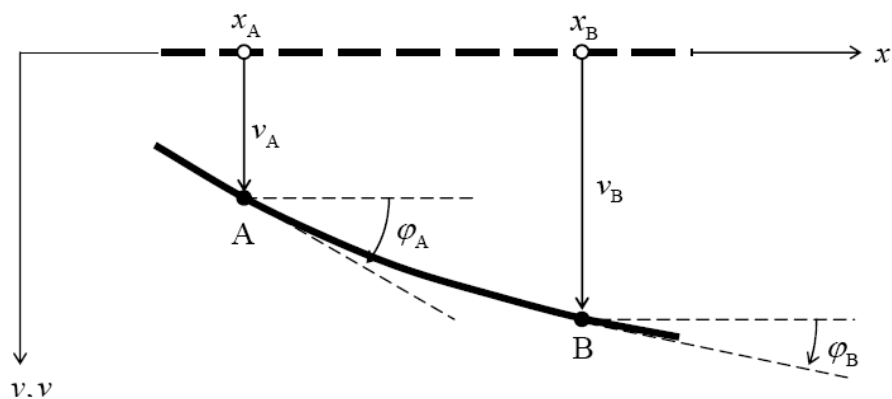
$$v' = \varphi + \frac{Q}{S}. \quad (2.8)$$

Jos kysymyksessä on staattisesti määrätty tehtävä, jolloin taivutusmomentti $M(x)$ ja leikkausvoima $Q(x)$ voidaan määrittää etukäteen ja ovat siis tunnettuja muuttujan x

funktioita, yhtälöt (2.7) ja (2.8) muodostavat ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöparin taipuman $v(x)$ ja kiertymän $\varphi(x)$ määrittämiseksi. Yhtälöparin yleiseen ratkaisuun tulee kaksi integrointivakiota, jotka määräytyvät taipumalle $v(x)$ ja/tai kiertymälle $\varphi(x)$ asetettavista reunaehdoista.

2.2 Timoshenko –palkin momenttipintamenetelmä

Momenttipintamenetelmällä voidaan laskea staattisesti määrättyjen palkkien taipumia ja kiertymiä halutuissa pisteissä (Aalto 2008, s. 81). Timoshenko –palkin taipuman määrittäminen perustuu taipuman, kiertymän ja liukumakulman yhteyteen (2.1), käristymän ja kiertymän yhteyteen (2.4), käristymän ja taivutusmomentin yhteyteen (2.5) sekä liukumakulman ja leikkausvoiman yhteyteen (2.6).



Kuva 2.2: Deformoituvan palkin osa AB (Aalto 2008, s. 84)

Tarkastellaan palkin osaa AB (Kuva 2.2). Integroidaan kiertymän ja käristymän yhteys

$$\varphi'(x) = -\kappa(x) \quad (2.9)$$

puolittain pisteestä x_A pisteeseen x_B , jolloin saadaan

$$\varphi(x_B) - \varphi(x_A) = - \int_{x_A}^{x_B} \kappa(x) dx \quad (2.10)$$

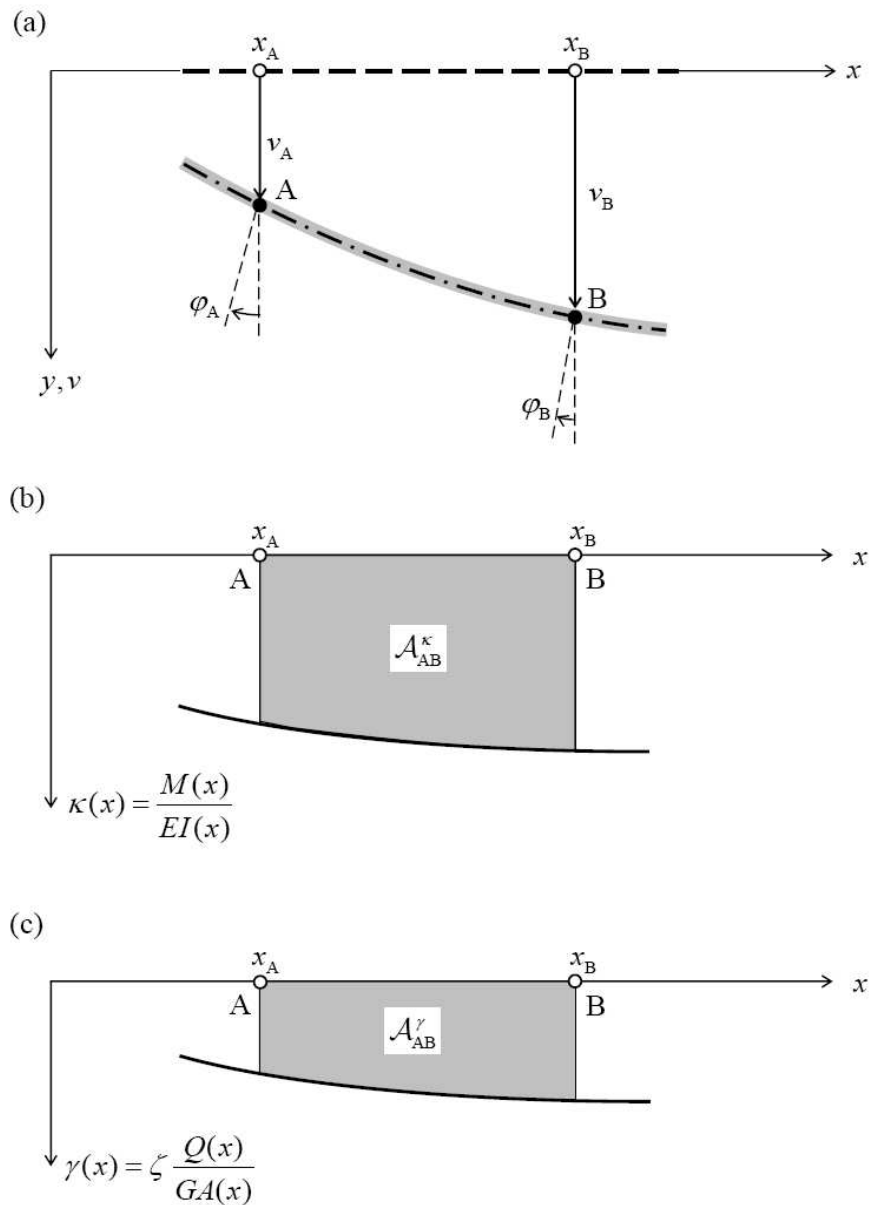
eli

$$\varphi_B - \varphi_A = -A_{AB}^{\kappa}, \quad (2.11)$$

missä

$$A_{AB}^{\kappa} = \int_{x_A}^{x_B} \kappa(x) dx = \int_{x_A}^{x_B} \frac{M(x)}{B(x)} dx \quad (2.12)$$

voidaan ymmärtää käyristymäpinnan $\kappa(x)$ pisteiden x_A ja x_B väliseksi pinta-alaksi (vrt. **Error! Reference source not found.b).**



Kuva 2. 3: Momenttipintamenetelmä Timoshenko -palkille: (a) palkin muodonmuutos välillä AB, (b) palkin käyristymäpinta välillä AB ja (c) palkin liukumapinta välillä AB (Aalto 2008, s. 232).

Tarkastellaan seuraavaksi tilannetta, jossa $x_B = x$ ja käytetään edellistä tulosta, jolloin saadaan

$$\varphi(x) - \varphi_A = -A_{Ax}^\kappa(x), \quad (2.13)$$

missä

$$A_{Ax}^\kappa(x) = \int_{x_A}^x \kappa(x) dx \quad (2.14)$$

voidaan nyt ymmärtää käyristymäkuvion $\kappa(x)$ pisteiden x_A ja x väliseksi pinta-alaksi. Sijoitetaan tulos (2.13) taipuman, kiertymän ja liukumakulman yhteyteen

$$v'(x) = \varphi(x) + \gamma(x), \quad (2.15)$$

ja saadaan

$$v'(x) = \varphi_A - A_{Ax}^\kappa(x) + \gamma(x). \quad (2.16)$$

Integroimalla tämä lauseke puolittain pisteestä x_A pisteeseen x_B , saadaan

$$v(x_B) - v(x_A) = \varphi_A(x_B - x_A) - \int_{x_A}^{x_B} A_{Ax}^\kappa(x) dx + \int_{x_A}^{x_B} \gamma(x) dx. \quad (2.17)$$

Käytetään lausekkeen viimeiseen integraaliin osittaisintegrointia ja saadaan

$$\int_{x_A}^{x_B} A_{Ax}^\kappa(x) dx = x_B \cdot A_{Ax}^\kappa(x_B) - x_A \cdot A_{Ax}^\kappa(x_A) - \int_{x_A}^{x_B} x \cdot A_{Ax}^{\kappa'}(x) dx. \quad (2.18)$$

Nyt $A_{Ax}^\kappa(x_B) = \int_{x_A}^{x_B} \kappa(x) dx$, $A_{Ax}^\kappa(x_A) = 0$ ja $A_{Ax}^{\kappa'}(x) = \kappa(x)$, joten saadaan

$$\int_{x_A}^{x_B} A_{Ax}^\kappa(x) dx = \int_{x_A}^{x_B} (x_B - x) \kappa(x) dx. \quad (2.19)$$

Sijoittamalla tämä tulos lausekkeeseen (2.17), saadaan lopulta

$$v(x_B) - v(x_A) = \varphi_A(x_B - x_A) - \int_{x_A}^{x_B} (x_B - x) \kappa(x) dx + \int_{x_A}^{x_B} \gamma(x) dx \quad (2.20)$$

eli

$$v_B - v_A = \varphi_A(x_B - x_A) - M_{AB}^{\kappa} + A_{AB}^{\gamma}, \quad (2.21)$$

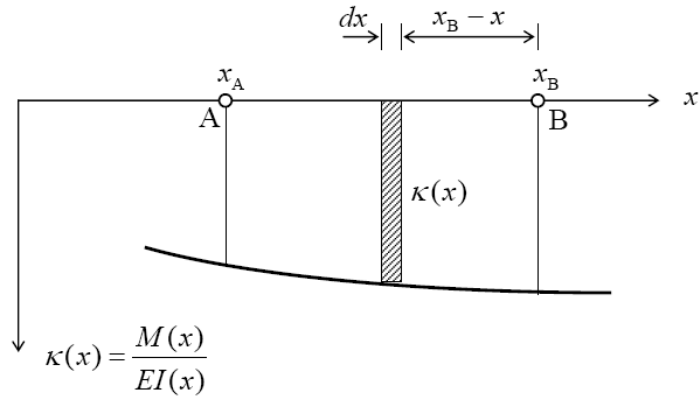
missä

$$M_{AB}^{\kappa} = \int_{x_A}^{x_B} (x_B - x) \kappa(x) dx = \int_{x_A}^{x_B} (x_B - x) \frac{M(x)}{EI(x)} dx \quad (2.22)$$

ja

$$A_{AB}^{\gamma} = \int_{x_A}^{x_B} \gamma(x) dx. \quad (2.23)$$

Suureen M_{AB}^{κ} voidaan ajatella olevan käyristymäpinnan $\kappa(x)$ pisteiden x_A ja x_B välisen pinnan momentti pisteen B suhteen (vrt. **Error! Reference source not found.**). Suureen A_{AB}^{γ} voidaan taas ymmärtää olevan liukumakulmapinnan $\gamma(x)$ pisteiden x_A ja x_B välinen pinta-ala (vrt. Kuva 2.3c).



$$d\mathcal{M}_{AB} = (x_B - x) \kappa(x) dx \Rightarrow \mathcal{M}_{AB} = \int_{x_A}^{x_B} (x_B - x) \kappa(x) dx$$

Kuva 2.4: Käyristymäpinnan momentin M_{AB}^{κ} muodostuminen (Aalto 2008, s. 86).

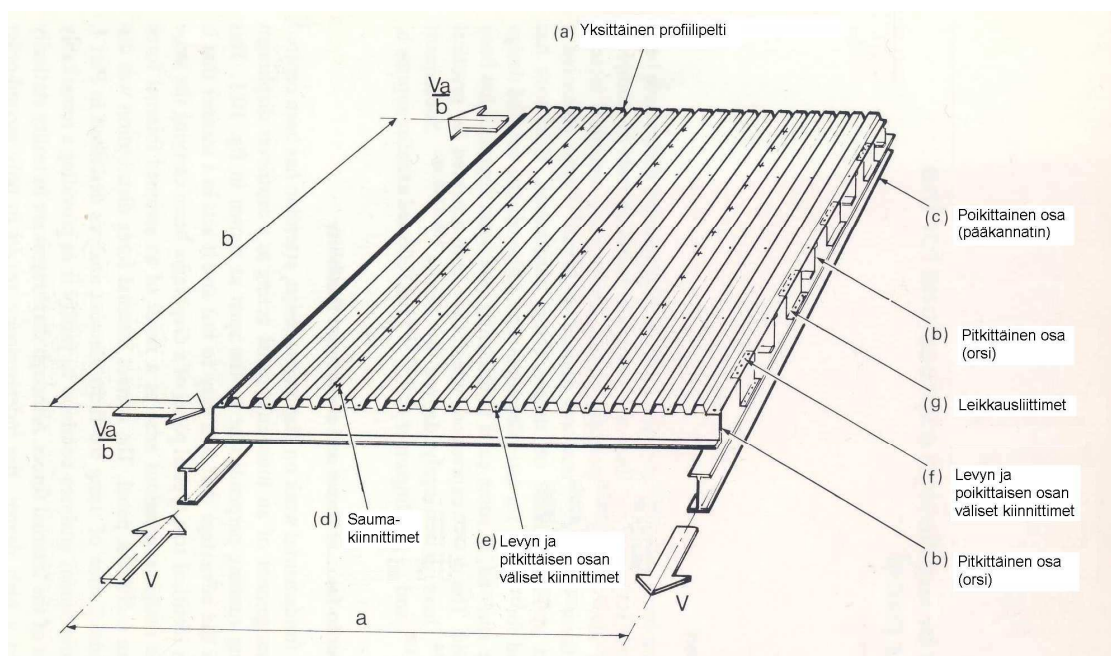
Kaavat (2.16) ja (2.26) muodostavat momenttipintamenetelmän peruskaavaparin. Ne ovat siis

$$\begin{aligned} \varphi_B - \varphi_A &= -A_{AB}^{\kappa} \\ v_B - v_A &= \varphi_A(x_B - x_A) - M_{AB}^{\kappa} + A_{AB}^{\gamma}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

3. Levyjäykistykseen jäykkyyksien arviointi

Levyjäykisteen taivutus- ja leikkausjäykkyyden laskemiseen käytetään joustavuustermejä, jotka määräytyvät eri siirtymätekijöiden perusteella. Kuvassa 3.1 esitetyn levyjäykistekentän taipuma on peräisin pääasiassa siirtymistä sivu- ja päätylimityksissä, pääkannattaja- ja orsiliitoksissa ja katelevyjen päädyissä, sekä leikkausmuodonmuutoksista yksittäisissä katelevyissä. Reunapalkin ja orsien taivutusmuodonmuutokset ovat vain pieni osa kokonaismuodonmuutosta.

Nykyisissä eurooppalaisissa suosituksissa (ECCS 1995) esitetyt joustavuuskaavat perustuvat pääasiassa Daviesin ja Bryanin (Davies, J. M. ja Bryan, E. R., 1982) johtamiin tuloksiin. Niissä otetaan huomioon kaksi tapausta sen mukaan, miten rakennus on jäykistetty. Päädyistä ja yhdeltä pitkältä sivulta jäykistettyä rakennusta käsitellään kaksitukisena palkkina ja yhdestä päädyistä ja pitkältä sivulta jäykistettyä kattorakennetta ulokepalkkina. Lisäksi joustavuuskaavaa valitessa on tiedettävä, asennetaanko kattolevyt rakennuksen poikittais- vai pitkittäissuunnassa.



Kuva 3.1: Jäykistelevykentän osat (Davies, J. M. ja Bryan, E. R., 1982, s. 208)

3.1 Taivutusjäykkyyden arviointi

Jäykistepalkin taivutusjäykkyyden B laskemiseksi on määritettävä palkin poikkileikkauksen jäyhyysmomentti I . Jäykkyydessä otetaan huomioon vain orret, mutta ei profiilipeltien vaikutusta. Jos reunaorren poikkileikkausala on A , jäykistepalkin (Kuva 3.1) jäyhyysmomentti on $Ab^2/2$.

Näin saadaan taivutusjäykkyydelle kaava

$$B = EI = \frac{EAb^2}{2}, \quad (3.1)$$

missä E on kimmokerroin.

Useampien orsien vaikutus jäyhyysmomenttiin otetaan huomioon nimittäjässä kertoimella α_3 (ECCS 1995), joka saadaan kaavasta

$$\alpha_3 = \frac{1}{1 + \sum_i^{(n_p-1)/2} \left(1 - \frac{2i}{n_p-1}\right)^2}, \quad (3.2)$$

missä n_p on orsien lukumäärä.

Davies ja Bryan esittävät (Davies, J. M. ja Bryan, E. R., 1982, s. 238 ja s. 251), että taivutusjäykkyys otettaisiin huomioon jäykistelevyn kokonaisjoustavuudessa c vertaamalla taivutuksen aiheuttamaa taipumaa vastaavaan leikkauksen aiheuttamaan taipumaan ja käyttämällä siitä saatua joustavuutta c_3 kokonaisjoustavuudessa. Siten taivutuksesta aiheutuva joustavuustermi c_3 on määritetty ulokepalkin tapauksessa yhden pistekuorman aiheuttamasta taipumasta ja kaksitukisen palkin tapauksessa tasaisen kuorman aiheuttamasta taipumasta.

Jos ulokepalkin jäyhyysmomentti on $Ab^2/2$, ja palkkiin vaikuttaa pistevoima P ulokkeen päässä, saadaan maksimitaipumaksi

$$v_{\max} = \frac{Pa^3}{3EI} = \frac{2Pa^3}{3EAb^2}, \quad (3.3)$$

missä P on pistevoima ulokkeen päässä ja a on palkin pituus.

Leikkauksen aiheuttama maksimitaipuma ulokepalkilla on

$$\Delta = \frac{Pa}{S} = \frac{Pac}{a} = Pc, \quad (3.4)$$

missä $S = a/c$ on leikkausjäykkyys.

Voidaan siis merkitä taipumat 3.3 ja 3.4 yhtä suuriksi

$$v_{\max} = \frac{2Pa^3}{3EAb^2} = Pc_3 \quad (3.5)$$

ja saadaan joustavuudelle tulos

$$c_3 = \frac{2a^3}{3EAb^2}. \quad (3.6)$$

Vastaavalla jäyhyysmomentilla kaksitukisen palkin maksimitaipumaksi tasan jakautuneesta kuormasta q saadaan

$$v_{\max} = \frac{5qn^4a^4}{384EI} = \frac{10qn^4a^4}{384EAb^2} \quad (3.7)$$

missä n on jäykistelevykenttien lukumäärä koko palkin matkalla ja a on yhden jäykistelevykentän leveys.

Leikkauksen aiheuttama maksimitaipuma kaksitukisella palkilla on

$$\Delta = \frac{n^2}{8}cqa. \quad (3.8)$$

Merkitään tulokset 3.7 ja 3.8 yhtä suuriksi

$$v_{\max} = \frac{10qn^4a^4}{384EAb^2} = \frac{c_3n^2qa}{8} \quad (3.9)$$

ja saadaan joustavuudelle

$$c_3 = \frac{n^2a^3}{4,8EAb^2}. \quad (3.10)$$

Kun orsien määrä otetaan huomioon kertoimella α_3 , saadaan

$$c_3 = \frac{n^2 a^3 \alpha_3}{4,8 E A b^2}. \quad (3.11)$$

Vaikka eurooppalaiset suositukset nojautuvat Daviesin ja Bryanin tapaan tarkastella taivutusjäykkyyttä osana levyn kokonaisjoustavuutta, tässä työssä taivutuksen ja leikkauksen osuutta käsitellään toisistaan erillään. Syynä tähän on ensinnäkin se, että Timoshenko –palkkiteoriassa näitä on havainnollisempaa ja helpompaa käsitellä erikseen. Toiseksi näin menetellen voidaan huomioda taivutusjäykkyyden osalta myös erilaiset kuormitustapaukset, sillä c_3 :n kaava ottaa huomioon vain tasan jakautuneen kuorman kaksitukiselle palkille ja yhden pistekuorman ulokepalkin päähän.

3.2 Leikkausjäykkyyden arviointi

3.21 Leikkausjäykkyyden arviointi ECCS –menetelmällä

Rakenteen leikkausjäykkyys S lasketaan käyttämällä apuna leikkausjoustavuutta c , jonka yksikkö on mm/N. Levyjäykisteen kokonaisleikkausjoustavuus on summa yksittäisistä leikkausjoustavuuskomponenteista, joita ovat

- profiilin vääristymästä aiheutuva joustavuus, $c_{1,1}$
- levyn leikkausmuodonmuutoksista aiheutuva joustavuus, $c_{1,2}$
- levyn ja orren liitoksen liukumasta aiheutuva joustavuus, $c_{2,1}$
- levyjen välisen sauman liukumasta aiheutuva joustavuus, $c_{2,2}$ ja
- pääkannattajakiinnityksen liukumasta aiheutuva joustavuus, $c_{2,3}$.

Tavallisessa tapauksessa $c_{2,3}$ käsittää lähinnä vain leikkausliittimien kiinnittimien liukumasta aiheutuvan joustavuuden. Jos erityisiä leikkausliittimiä ei käytetä, korvataan $c_{2,3}$ orren ja pääkannattajan liitoksen joustolla.

Leikkausjäykkyys S saadaan kaavalla

$$S = \frac{L}{c}, \quad (3.12)$$

missä L on rakenteen pituus.

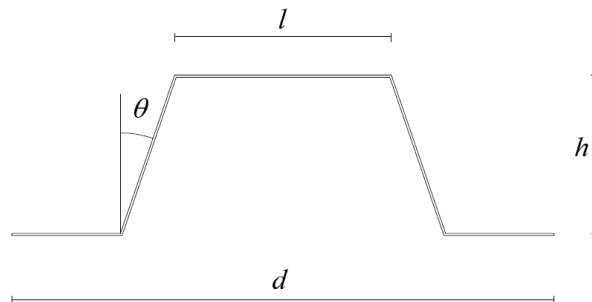
Davies ja Lawson ovat esittäneet leikkausjoustavuustermiä $c_{1,1}$ johtamisen (Davies, J. M. ja Lawson, R. M. 1978). Muiden joustavuustermien johtaminen on esitetty liitteessä 3A. Tässä niitä käsitellään vain lyhyesti ja pintapuolisesti.

Profiilin vääristymästä aiheutuva joustavuus $c_{1,1}$

Joustavuustermiä $c_{1,1}$ johtaminen on työlästä, joten siitä on kehitetty useita eri muotoja, joista vain osa soveltuu suunnitteluun. Eurooppalaisissa suosituksissa käytetään Daviesin ja Lawsonin johtamaa energia-analyysiin perustuvaa tulosta

$$c_{1,1} = \frac{ad^{2,5}\bar{K}}{Et^{2,5}b^2} \quad (3.13)$$

missä a on jäykistelevyn sivumitta kohtisuorassa poimutuksen suuntaa vastaan, b on jäykistelevyn sivumitta poimituksen suunnassa, d on poimujakson pituus, E on kimmokerroin, t on profiilin nettopaksuus ja \bar{K} on profiilista riippuva vakio.



Kuva 3.2: Profiilin mitat

Vakion \bar{K} - arvo määräytyy kuvassa 3.2 näkyvistä profiilin mitoista sekä siitä, onko profiili kiinnitetty jokaisen vai joka toisen kourun kohdalla. \bar{K} - arvoja on taulukoitu lähteissä (Davies, J. M. ja Bryan, E. R. 1982, s. 177-181 ja ECCS 1995, s.C.30-31). Näiden lähteiden taulukot eroavat hieman toisistaan. \bar{K} - arvot löytyvät myös ohjelmaliitteestä 3C ECCS:n taulukoiden mukaisina.

Levyn leikkausmuodonmuutoksista aiheutuva joustavuus $c_{1,2}$

Joustavuustermin $c_{1,2}$ johtamisessa on käytetty leikkausjännityksen yleistä määrittelyä ja leikkauksen Hooken lakia. Siirtymä on laskettu ensin yhden kourujakson matkalla ja summattu sitten koko jäykistelevyn yli. Näin on saatu tulokseksi

$$c_{1,2} = \frac{2a(1+\nu)(1+2h/d)}{Ebt}, \quad (3.14)$$

missä a on jäykistelevyn sivumitta kohtisuorassa poimutuksen suuntaa vastaan, ν on Poisson'n luku, h on profiilin korkeus, d on poimujakson pituus, E on kimmokerroin, b on jäykistelevyn sivumitta poimituksen suunnassa ja t on profiilin nettopaksuus.

Levyn ja orren liitoksen liukumasta aiheutuva joustavuus $c_{2,1}$

Joustavuustermin $c_{2,1}$ johtamisessa on lähetty liikkeelle yksinkertaisesta kantavasta levyjäykisteestä, jonka urat ovat kohtisuorassa levyn jännettä vastaan, ja tarkasteltu leikkausvoiman jakautumista levyn ja orren välisissä kiinnittimissä.

Levyn ja orren liitoksen liukumasta aiheutuvaksi joustoksi $c_{2,1}$ on saatu

$$c_{2,1} = \frac{2aps_p}{b^2}, \quad (3.15)$$

missä a on jäykistelevyn sivumitta kohtisuorassa poimutuksen suuntaa vastaan, p on levyn ja orren kiinnittimien keskinäinen väli, s_p on levyn ja orren kiinnittimien jousto ja b on jäykistelevyn sivumitta poimituksen suunnassa.

Kaava perustuu oletukselle, että taivutuksesta aiheutuva normaalivoima siirtyy kahdelle uloimmalle orrelle. Tämä on järkevä oletus yksittäistapaukselle, mutta jäykistepalkin tapauksessa on järkevämpää olettaa lineaarinen, taivutuksesta aiheutuva jännitys jakauma koko poikkileikkauksen matkalle siten, että merkittävä osa aksiaalivoimista otetaan vastaan sisemmällä orsilla. Useampien orsien vaikutus otetaan huomioon kertoimella α_3 (ECCS 1995).

Levyjen välisen sauman liukumasta aiheutuva joustavuus $c_{2.2}$

Joustavuustermiin $c_{2.2}$ johtamisessa on lähetty liikkeelle yksinkertaisesta kantavasta levyjäykisteestä, jonka urat ovat rakenteen poikittaissuunnassa, ja tarkasteltu leikkausvoiman jakautumista levyjen välisissä saumakiinnittimissä ja levyn ja orsien välisissä kiinnittimissä. Nyt voidaan erottaa kaksi tapausta riippuen siitä, sijoitetaanko saumakiinnittimet levyn kouruun vai harjalle. Tämä huomioidaan kertoimella β_1 .

Levyjen välisen sauman liukumasta aiheutuvaksi joustavuudeksi $c_{2.2}$ on saatu

$$c_{2.2} = \frac{2s_s s_p (n_{sh} - 1)}{2n_s s_p + \beta_1 n_p s_s}, \quad (3.16)$$

missä s_s on saumakiinnittimen joustavuus, s_p on levyn ja orren kiinnittimien joustavuus, n_{sh} on levykentän profiililevyjen määrä palkin pituussuunnassa, n_s on saumakiinnittimien lukumäärä (ilman levyn ja orren välisiä kiinnittimiä), n_p on orsien lukumäärä ja β_1 on vakio, jonka arvo riippuu levyssä olevien kiinnittimien n_f lukumäärästä sekä siitä, onko kiinnitykset tehty saumoissa profiilin kourun vai harjan kohdalta.

Pääkannattajakiinnityksen liukumasta aiheutuva joustavuus $c_{2.3}$

Joustavuustermiin $c_{2.3}$ osalta johtaminen on suoritettava ulokepalkille ja kaksitukiselle palkille erikseen. Lisäksi on huomioitava, onko profiililevy kiinnitetty kahdelta vai neljältä sivulta. Käsitellään ensin tapaukset, joissa levyt ovat rakennuksen poikittaissuunnassa.

Ulokepalkin tapauksessa neljältä sivulta kiinnitetylle jäykistelevylle saadaan

$$c_{2.3} = \frac{2s_{sc}}{n_{sc}}, \quad (3.17)$$

missä s_{sc} on yksittäisen leikkausliittimen joustavuus ja n_{sc} on leikkausliittimien kiinnittimien lukumäärä päädyn pääkannattajassa.

Ulokepalkin tapauksessa kahdelta sivulta kiinnitetylle jäykistelevylle saadaan

$$c_{2.3} = \frac{2}{n_p} \left(s_{pr} + \frac{s_p}{\beta_2} \right), \quad (3.18)$$

missä s_{pr} on orsi-pääkannattajaliitoksen jousto, s_p on levyn ja orren välisten kiinnittimien jousto, n_p on orsien lukumäärä ja β_2 on kiinnittimien n_f lukumäärästä riippuva kerroin.

Kaksitukisen palkin tapauksessa neljältä sivulta kiinnitetylle jäykistelevylle saadaan

$$c_{2.3} = \frac{4(n+1)}{n^2} \frac{s_{sc}}{n'_{sc}}, \quad (3.19)$$

missä s_{sc} on yksittäisen leikkausliittimen joustavuus, n on levykenttien määrä jäykistelevyn pituudella ja n'_{sc} on leikkausliittimien kiinnittimien lukumäärä välikannattajassa.

Kaksitukisen palkin tapauksessa kahdelta sivulta kiinnitetylle jäykistelevylle saadaan

$$c_{2.3} = \frac{4(n-1)}{n^2 n_p} \left(s_{pr} + \frac{s_p}{\beta_2} \right), \quad (3.20)$$

missä s_{pr} on orsi-pääkannattajaliitoksen jousto, s_p on levyn ja orren välisten kiinnittimien jousto, n_p on orsien lukumäärä, n on levypaneelien määrä jäykistelevyn pituudella ja β_2 on kiinnittimien n_f lukumäärästä riippuva kerroin.

Levyjen ollessa rakennuksen pitkittäissuunnassa ulokepalkin joustavuuden $c_{2.3}$ kaavat vastaavat tapausta, jossa levyt ovat poikittaissuunnassa. Kaksitukisen palkin kaavat sen sijaan muuttuvat.

Kaksitukisen palkin tapauksessa neljältä sivulta kiinnitetylle jäykistelevylle saadaan

$$c_{2.3} = \frac{2s_{sc}}{n_{sc}}, \quad (3.21)$$

missä s_{sc} on yksittäisen leikkausliittimen joustavuus ja n_{sc} on leikkausliittimien kiinnittimien lukumäärä päätykannattajassa.

Kaksitukisen palkin tapauksessa kahdelta sivulta kiinnitetylle jäykistelevylle saadaan

$$c_{2,3} = s_{pr} + \frac{s_p}{\beta_2}, \quad (3.22)$$

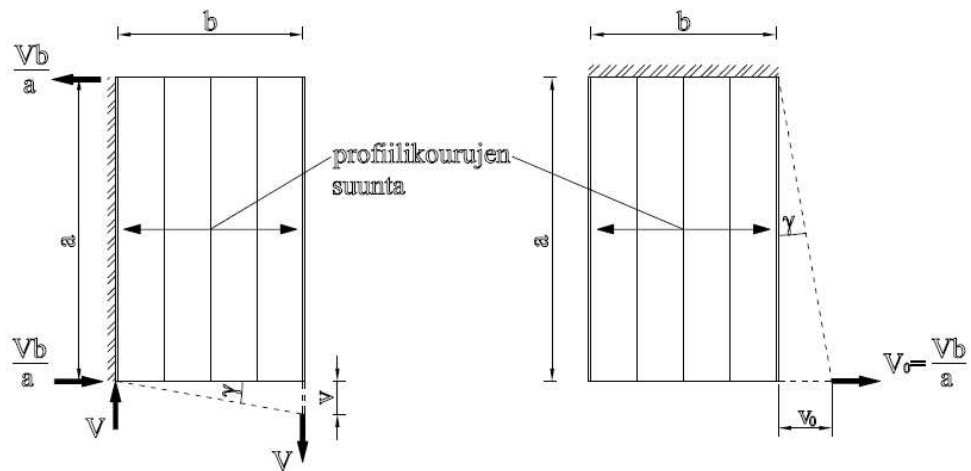
missä s_{pr} on orsi-pääkannattajaliitoksen jousto, s_p on levyn ja orren välisten kiinnittimien jousto ja β_2 on kiinnittimien n_f lukumäärästä riippuva kerroin.

Kokonaisleikkausjoustavuus c'

Leikkausjoustavuustermi on määritetty tapauksessa, jossa levykourut ovat rakennuksen poikittaissuunnassa, joten kokonaisleikkausjoustavuus saadaan yksinkertaisesti termien summana

$$c' = c_{1,1} + c_{1,2} + c_{2,1} + c_{2,2} + c_{2,3}. \quad (3.23)$$

Kun levykourut ovat rakennuksen pitkittäissuunnassa, joudutaan leikkausjoustavuuden saamiseksi tarkastelemaan kahta toisiaan vastaavaa uloketapausta (katso Kuva 3.3).



Kuva 3.3: Toisiaan vastaavat ulokelevyt

Tapauksia tarkastellessa voidaan huomata, että oikean puoleisen tapauksen voima V_0 on yhtä suuri kuin vasemman puoleisen tapauksen tukireaktio, joten vasemman puoleisen tapauksen voiman V on oltava siten yhtä suuri kuin oikean puoleisen tapauksen tukireaktio. Saadaan siis

$$V = \frac{a}{b} V_0. \quad (3.24)$$

Molemmissa tapauksissa liukuma γ on yhtä suuri, joten taipumaksi v saadaan

$$v = \frac{b}{a} v_0. \quad (3.25)$$

Ottaen huomioon, että leikkausjoustavuus määritellään taipuman suhteena voimaan, voidaan vasemman puolen tapaukselle nyt kirjoittaa

$$c = \frac{v}{V} = \frac{\frac{b}{a} v_0}{\frac{a}{b} V_0} = \frac{b^2}{a^2} c_0. \quad (3.26)$$

Kokonaisleikkausjoustavuus tapauksessa, jossa kourut ovat rakennuksen pitkittäissuunnassa, on nyt siis

$$c' = \frac{b^2}{a^2} (c_{1.1} + c_{1.2} + c_{2.1} + c_{2.2} + c_{2.3}). \quad (3.27)$$

3.22 ECCS –menetelmän saattaminen ohjelmointiin sopivaksi

Seuraavaksi esitellään keinoja ECCS –menetelmän saattamiseksi ohjelmointiin sopivaksi. Ohjelmoinnin kannalta ongelmallista on se, että osa tarvittavista kertoimista on empiirisiä ja niiden sisällyttäminen ongelmaan tapahtuu taulukkomuodossa. K -kertoimen määrittämistä varten on kehitetty algoritmi, joka interpoloi sopivan arvon kolmiulotteisesta taulukosta.

3.221 α – ja β –kertoimien laskeminen

α_1 - ja α_5 -kerroin ovat empiirisiä, joten ne sisällytetään ohjelmaan taulukkoina. Muille α - ja β -kertoimille on olemassa kaavat. Liitteessä 3B esitellään mallialiohjelma, joka hakee α_1 - ja α_5 -kertoimet taulukosta ja laskee muut α - ja β -kertoimien arvot.

Aliohjelman sisäänmenoparametrit ovat orsien lukumäärä np jäykistelevyissä reunaorret mukaan luettuina, orsien lukumäärä nps yhtä profiililevyn pituutta kohden, nl levypituuksien lukumäärä jäykistepalkissa (Liite 3A, Taulukko 2), levyssä olevien kiinnittimien lukumäärä nf orsien suunnassa, levypaneelien määrä nb jäykistelevyn

korkeussuunnassa (Liite 3A, Taulukko 1), levyn kiinnitystapaa ilmaisevan vaihtoehdon numero cas , kerrointaulukko $alf1T$, joka sisältää α_1 :n kertoimet nps :n arvoilla 2-20, ja kerrointaulukko $alf5T$, joka sisältää α_5 :n kertoimet nl :n arvoilla 2-5. Ohjelman ulostuloparametrit ovat $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \beta_1$ ja β_2 .

Aliohjelman aluksi on määritelty ohjelman nimi, jolla pääohjelma kutsuu aliohjelmaa. Ohjelma valitsee kertoimen α_1 taulukosta $alf1T$ nps :n arvoilla 2-20 ja sitä suuremmilla arvoilla α_1 on 0,6. α_2 - ja α_3 -kertoimien kaavojen (3.28)-(3.31) nimittäjissä on summaustermit, jotka ohjelma laskee apusuureiden $a2$ ja $a3$ avulla sen mukaan, onko np parillinen vai pariton. Varsinaiset α_2 :n ja α_3 :n arvot saadaan vastaavien kaavojen mukaisesti. α_4 lasketaan kaavan (3.32) mukaisesti. Kerroin α_5 valitaan taulukosta $alf5T$ nl :n arvoilla 2-5 ja sitä suuremmilla arvoilla α_5 on 0,7.

β_1 kerrointa määrittäessään ohjelma tarvitsee tiedon siitä, ovatko profiilit kiinnitetty toisiinsa ylä- vai alalaipasta. Sisäänmenoparametri cas ottaa tämän huomioon siten, että arvo 1 viittaa profiilin ylälaippojen kiinnitykseen ja arvo 2 alalaippojen kiinnitykseen. β_1 - ja β_2 -kertoimien kaavojen (3.33)-(3.38) nimittäjissä on summaustermit, jotka ohjelma laskee apusuureiden $b1$ ja $b2$ avulla sen mukaan, onko nf parillinen vai pariton. Varsinaiset β_1 :n ja β_2 :n arvot saadaan vastaavien kaavojen mukaan.

α - ja β -kertoimia laskeva aliohjelma noudattaa seuraavaa toimintakaaviota.

1. Kertoimen α_1 hakeminen taulukosta orsien lukumäärän nps mukaan. Jos $nps > 20$, kerroin α_1 on 0,6.
2. Kerroin α_2 parillisille orsien lukumäärälle np :

$$\alpha_2 = \frac{1}{1 + \sum_1^{(n_p-2)/2} \left(1 - \frac{2i}{n_p-1} \right)}. \quad (3.28)$$

3. Kerroin α_2 parittomille orsien lukumäärälle np :

$$\alpha_2 = \frac{1}{1 + \sum_1^{(n_p-1)/2} \left(1 - \frac{2i}{n_p-1}\right)}. \quad (3.29)$$

4. Kerroin α_3 parillisille orsien lukumäärälle np :

$$\alpha_3 = \frac{1}{1 + \sum_1^{(n_p-2)/2} \left(1 - \frac{2i}{n_p-1}\right)^2}. \quad (3.30)$$

5. Kerroin α_3 parittomille orsien lukumäärälle np :

$$\alpha_3 = \frac{1}{1 + \sum_1^{(n_p-1)/2} \left(1 - \frac{2i}{n_p-1}\right)^2}. \quad (3.31)$$

6. Kerroin α_4 poimulevyjen määrän huomioon ottamiseksi:

$$\alpha_4 = 1 + 0,3 \cdot n_b. \quad (3.32)$$

7. Kerroin β_1 , profiilit kiinnitetty ylälaipasta, kiinnittimien määrä np parillinen:

$$\beta_1 = \sum_{i=1}^{n_f/2} \left(\frac{2i-1}{n_f}\right)^3. \quad (3.33)$$

8. Kerroin β_1 , profiilit kiinnitetty ylälaipasta, kiinnittimien määrä np pariton:

$$\beta_1 = \sum_{i=1}^{(n_f-1)/2} \left(\frac{2i}{n_f}\right)^3. \quad (3.34)$$

9. Kerroin β_1 , profiilit kiinnitetty alalaipasta, kiinnittimien määrä np parillinen:

$$\beta_1 = \sum_{i=1}^{n_f/2} \left(\frac{2i-1}{n_f-1}\right)^3. \quad (3.35)$$

10. Kerroin β_1 , profiilit kiinnitetty alalaipasta, kiinnittimien määrä np pariton:

$$\beta_1 = \sum_{i=1}^{(n_f-1)/2} \left(\frac{2i}{n_f-1} \right)^3. \quad (3.36)$$

11. Kerroin β_2 , kiinnittimien määrä np parillinen:

$$\beta_2 = \sum_{i=1}^{n_f/2} \left(\frac{2i-1}{n_f-1} \right)^2. \quad (3.37)$$

12. Kerroin β_2 , kiinnittimien määrä np pariton:

$$\beta_2 = \sum_{i=1}^{(n_f-1)/2} \left(\frac{2i}{n_f-1} \right)^2 \quad (3.38)$$

13. Kertoimen α_5 hakeminen taulukosta levypituuksien lukumäärän nl mukaan. Jos $nl > 5$, kerroin α_5 on 0,7.

3.222 Interpolointialgoritmi K –kertoimen määrittämiseksi

Joustavuustermin $c_{1,1}$ kaavassa esiintyvä kerroin \bar{K} on kokeellisesti määritetty ja se riippuu profiilin poikkileikkauksen mitoista ja kaltevuuskulmasta. \bar{K} arvot on taulukoitu liitteessä 3C ECCS:n mukaisesti. Taulukon käytössä ongelmallista on, että se on kolmiulotteinen, joten käsin laskennalla siitä on hankala määrittää \bar{K} –arvoa profiilille, jonka mitat eivät täsmälleen vastaa jonkun taulukossa annetun profiilin mittoja. Esitetään seuraavaksi interpolointialgoritmi, joka laskee taulukkoarvojen perusteella likiarvon halutun profiilin \bar{K} –kertoimelle.

Tarkastellaan funktiota $f(x, y, z)$, jonka arvot $f_{ijk} = f(x_i, y_j, z_k)$ tasavälisissä pisteissä

$$x_i = x_A + (i-1)\Delta x, \quad i = 1, \dots, n_x,$$

$$y_j = y_A + (j-1)\Delta y, \quad j = 1, \dots, n_y,$$

$$z_k = z_A + (k-1)\Delta z, \quad k = 1, \dots, n_z$$

tunnetaan. Määritetään funktion likiarvo pisteessä (x, y, z) .

Niiden pisteiden järjestysnumerot i_1 ja i_2 , j_1 ja j_2 , k_1 ja k_2 , joiden välissä piste (x, y, z) sijaitsee, saadaan kaavoilla

$$\begin{aligned} i_1 &= \text{int}\left(\frac{x-x_A}{\Delta x} + 0,5\right), i_2 = i_1 + 1 \\ j_1 &= \text{int}\left(\frac{y-y_A}{\Delta y} + 0,5\right), j_2 = j_1 + 1 \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$k_1 = \text{int}\left(\frac{z-z_A}{\Delta z} + 0,5\right), k_2 = k_1 + 1$$

missä kirjainyhdistelmällä int tarkoitetaan funktiota, joka pyöristää argumenttinsa lähimpään kokonaislukuun. Soveltamalla lineaarista interpolointia x – suunnassa saadaan

$$\tilde{f}(x, y, z) = \frac{x_{i2} - x}{\Delta x} f(x_{i1}, y, z) + \frac{x - x_{i1}}{\Delta x} f(x_{i2}, y, z). \quad (3.40)$$

Ottamalla käyttöön merkinnät

$$\xi_1 = \frac{x_{i2} - x}{\Delta x}, \xi_2 = \frac{x - x_{i1}}{\Delta x} \quad (3.41)$$

funktion $f(x, y, z)$ likiarvoille saadaan aluksi

$$\tilde{f}(x, y, z) = \xi_1 f(x_{i1}, y, z) + \xi_2 f(x_{i2}, y, z). \quad (3.42)$$

Soveltamalla vastaavanlaista lineaarista interpolointia y – suunnassa, saadaan funktioiden $f(x_{i1}, y, z)$ ja $f(x_{i2}, y, z)$ likiarvoille

$$\tilde{f}(x_{i1}, y, z) = \eta_1 f(x_{i1}, y_{j1}, z) + \eta_2 f(x_{i1}, y_{j2}, z) \quad (3.43)$$

$$\tilde{f}(x_{i2}, y, z) = \eta_1 f(x_{i2}, y_{j1}, z) + \eta_2 f(x_{i2}, y_{j2}, z).$$

Kun vielä sovelletaan vastaavanlaista lineaarista interpolointia z – suunnassa, saadaan funktioiden $f(x_{i1}, y_{j1}, z)$, $f(x_{i1}, y_{j2}, z)$, $f(x_{i2}, y_{j1}, z)$ ja $f(x_{i2}, y_{j2}, z)$ likiarvoille

$$\begin{aligned} f(x_{i1}, y_{j1}, z) &= \zeta_1 f(x_{i1}, y_{j1}, z_{k1}) + \zeta_2 f(x_{i1}, y_{j1}, z_{k2}) \\ f(x_{i1}, y_{j2}, z) &= \zeta_1 f(x_{i1}, y_{j2}, z_{k1}) + \zeta_2 f(x_{i1}, y_{j2}, z_{k2}) \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$f(x_{i_2}, y_{j_1}, z) = \zeta_1 f(x_{i_2}, y_{j_1}, z_{k_1}) + \zeta_2 f(x_{i_2}, y_{j_1}, z_{k_2})$$

$$f(x_{i_2}, y_{j_2}, z) = \zeta_1 f(x_{i_2}, y_{j_2}, z_{k_1}) + \zeta_2 f(x_{i_2}, y_{j_2}, z_{k_2})$$

Sijoittamalla tulokset (3.44) lausekkeisiin (3.43) ja nämä edelleen lausekkeeseen (3.42) saadaan funktion $f(x, y, z)$ likiarvoksi

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x, y, z) = & \xi_1 \eta_1 \zeta_1 f_{i_1, j_1, k_1} + \xi_2 \eta_1 \zeta_1 f_{i_2, j_1, k_1} + \xi_1 \eta_2 \zeta_1 f_{i_1, j_2, k_1} + \xi_2 \eta_2 \zeta_1 f_{i_2, j_2, k_1} \\ & + \xi_1 \eta_1 \zeta_2 f_{i_1, j_1, k_2} + \xi_2 \eta_1 \zeta_2 f_{i_2, j_1, k_2} + \xi_1 \eta_2 \zeta_2 f_{i_1, j_2, k_2} + \xi_2 \eta_2 \zeta_2 f_{i_2, j_2, k_2}, \end{aligned} \quad (3.45)$$

missä siis

$$\eta_1 = \frac{y_{j_2} - y}{\Delta y}, \eta_2 = \frac{y - y_{j_1}}{\Delta y}, \zeta_1 = \frac{z_{k_2} - z}{\Delta z}, \zeta_2 = \frac{z - z_{k_1}}{\Delta z}. \quad (3.46)$$

Interpolointialgoritmin perusteella on muodostettu aliohjelma (liite 3D), jonka sisäänmenoparametrit ovat haettu x-koordinaatti x , haettu y-koordinaatti y , haettu z-koordinaatti z , taulukon alkupään x-koordinaatti x_A , taulukon alkupään y-koordinaatti y_A , taulukon alkupään z-koordinaatti z_A , x:n jakoväli $delx$, y:n jakoväli $dely$, z:n jakoväli $delz$ ja funktion arvotaulukko fT . Ulostuloparametri on funktion arvo f .

\bar{K} – kertoimen laskeva aliohjelma noudattaa seuraavaa toimintakaaviota.

1. Niiden pisteiden järjestysnumerot i_1 ja i_2 , j_1 ja j_2 , k_1 ja k_2 , joiden välissä haluttu arvo sijaitsee:

$$\begin{aligned} i_1 &= \text{int}\left(\frac{x - x_A}{\Delta x} + 0,5\right), i_2 = i_1 + 1, \\ j_1 &= \text{int}\left(\frac{y - y_A}{\Delta y} + 0,5\right), j_2 = j_1 + 1 \\ k_1 &= \text{int}\left(\frac{z - z_A}{\Delta z} + 0,5\right), k_2 = k_1 + 1. \end{aligned} \quad (3.47)$$

2. Niiden pisteiden koordinaatit, joiden välissä haluttu arvo sijaitsee:

$$x_{i_1} = x_A + (i_1 - 1)\Delta x, x_{i_2} = x_{i_1} + \Delta x,$$

$$y_{j1} = y_A + (j_1 - 1)\Delta y, \quad y_{j2} = y_{j1} + \Delta y, \quad (3.48)$$

$$z_{k1} = z_A + (k_1 - 1)\Delta z, \quad z_{k2} = z_{k1} + \Delta z.$$

3. Apumerkinnät:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{x_{i2} - x}{\Delta x}, \quad \xi_2 = \frac{x - x_{i1}}{\Delta x}, \\ \eta_1 &= \frac{y_{j2} - y}{\Delta y}, \quad \eta_2 = \frac{y - y_{j1}}{\Delta y}, \\ \zeta_1 &= \frac{z_{k2} - z}{\Delta z}, \quad \zeta_2 = \frac{z - z_{k1}}{\Delta z}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

4. Interpolointifunktio:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x, y, z) &= \xi_1 \eta_1 \zeta_1 f_{i1,j1,k1} + \xi_2 \eta_1 \zeta_1 f_{i2,j1,k1} + \xi_1 \eta_2 \zeta_1 f_{i1,j2,k1} + \xi_2 \eta_2 \zeta_1 f_{i2,j2,k1} \\ &+ \xi_1 \eta_1 \zeta_2 f_{i1,j1,k2} + \xi_2 \eta_1 \zeta_2 f_{i2,j1,k2} + \xi_1 \eta_2 \zeta_2 f_{i1,j2,k2} + \xi_2 \eta_2 \zeta_2 f_{i2,j2,k2}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

3.223 Aliohjelma leikkausjoustavuustermien määrittämiseksi

Joustavuustermit laskeva aliohjelma tarvitsee tiedot profiilien suunnasta, jäykistepalkin tuennasta ja levypeltien kiinnityksistä. Nämä otetaan huomioon sisäänmenoparametreilla t_1 , t_2 ja t_3 . t_1 :n arvo 1 viittaa siihen, että profiilikourut ovat rakennuksen poikittaissuunnassa, ja arvo 2 siihen, että ne ovat rakennuksen pitkittäissuunnassa. t_2 :n arvo 1 viittaa kaksitukiseen palkkiin ja arvo 2 ulokepalkkiin. t_3 :n arvo 1 viittaa siihen, että pelti on kiinnitetty neljältä sivulta, ja arvo 2 siihen, että se on kiinnitetty kahdelta sivulta.

Leikkausjoustavuuksia laskeva aliohjelma käyttää parametreista t_1 , t_2 ja t_3 riippuen seuraavia ECCS:n kaavoja.

1. Joustavuustermi $c_{1.1}$, levyjen kourut rakennuksen pitkittäissuunnassa, ei orsia, tuentamuotona kaksitukinen palkki:

$$c_{1.1} = \frac{ad^{2.5}\alpha_5 K}{Et^{2.5}b^2}. \quad (3.51)$$

2. Joustavuustermi $c_{1,1}$, muut tapaukset:

$$c_{1,1} = \frac{ad^{2,5}\alpha_1\alpha_4K}{Et^{2,5}b^2}. \quad (3.52)$$

3. Joustavuustermi $c_{1,2}$, levyjen kourut rakennuksen poikittaissuunnassa, orret, tuentamuotona kaksitukinen palkki:

$$c_{1,2} = \frac{2a\alpha_2(1+\nu)(1+2h/d)}{Ebt}. \quad (3.53)$$

4. Joustavuustermi $c_{1,2}$, muut tapaukset:

$$c_{1,2} = \frac{2a(1+\nu)(1+2h/d)}{Ebt}. \quad (3.54)$$

5. Joustavuustermi $c_{2,1}$, levyjen kourut rakennuksen poikittaissuunnassa, orret, tuentamuotona kaksitukinen palkki:

$$c_{2,1} = \frac{2aps_p\alpha_3}{b^2}. \quad (3.55)$$

6. Joustavuustermi $c_{2,1}$, muut tapaukset:

$$c_{2,1} = \frac{2aps_p}{b^2}. \quad (3.56)$$

7. Joustavuustermi $c_{2,2}$, levyjen kourut rakennuksen pitkittäissuunnassa, ei orsia, tuentamuotona kaksitukinen palkki:

$$c_{2,2} = \frac{s_s s_p (n_{sh} - 1)}{n_s s_p + \beta_1 s_s} \quad (3.57)$$

8. Joustavuustermi $c_{2,2}$, muut tapaukset:

$$c_{2,2} = \frac{2s_s s_p (n_{sh} - 1)}{2n_s s_p + \beta_1 n_p s_s} \quad (3.58)$$

9. Joustavuustermi $c_{2,3}$, levyjen kourut rakennuksen poikittaissuunnassa, orret, tuentamuotona kaksitukinen palkki, levyt kiinnitetty neljältä sivulta:

$$c_{2.3} = \frac{4(n+1)}{n^2} \frac{s_{sc}}{n'_{sc}}. \quad (3.59)$$

10. Joustavuustermi $c_{2.3}$, levyjen kourut rakennuksen poikittaissuunnassa, orret, tuentamuotona kaksitukinen palkki, levyt kiinnitetty kahdelta sivulta:

$$c_{2.3} = \frac{4(n-1)}{n^2 n_p} \left(s_{pr} + \frac{s_p}{\beta_2} \right). \quad (3.60)$$

11. Joustavuustermi $c_{2.3}$, levyjen kourut rakennuksen poikittaissuunnassa, orret, tuentamuotona ulokepalkki, levyt kiinnitetty kahdelta sivulta:

$$c_{2.3} = \frac{2}{n_p} \left(s_{pr} + \frac{s_p}{\beta_2} \right). \quad (3.61)$$

12. Joustavuustermi $c_{2.3}$, levyjen kourut rakennuksen pitkittäissuunnassa, ei orsia, tuentamuotona kaksitukinen palkki, levyt kiinnitetty kahdelta sivulta:

$$c_{2.3} = s_{pr} + \frac{s_p}{\beta_2}. \quad (3.62)$$

13. Joustavuustermi $c_{2.3}$, levyjen kourut rakennuksen pitkittäissuunnassa, ei orsia, tuentamuotona ulokepalkki, levyt kiinnitetty kahdelta sivulta:

$$c_{2.3} = \frac{2}{n_p} \left(s_{pr} + \frac{s_p}{\beta_2} \right). \quad (3.63)$$

14. Joustavuustermi $c_{2.3}$, muut tapaukset:

$$c_{2.3} = \frac{2s_{sc}}{n_{sc}}. \quad (3.64)$$

15. Leikkausjoustavuus c' , levyjen kourut rakennuksen poikittaissuunnassa, orret

$$c' = (c_{1.1} + c_{1.2} + c_{2.1} + c_{2.2} + c_{2.3}) \quad (3.65)$$

16. Leikkausjoustavuus c' , levyjen kourut rakennuksen pitkittäissuunnassa, ei orsia

$$c' = \frac{b^2}{a^2} (c_{1,1} + c_{1,2} + c_{2,1} + c_{2,2} + c_{2,3}) \quad (3.66)$$

Leikkausjoustavuuden laskeva aliohjelma löytyy liitteestä 3E.

3.23 Malliohjelma leikkausjoustavuuden määrittämiseksi (MATLAB)

Kun α -, β - ja \bar{K} -kertoimille on laadittu aliohjelmat, voidaan joustavuustermien laskeminen suorittaa helposti varsinaisella pääohjelmalla, joka löytyy liitteestä 3F. Aluksi ohjelma kutsuu taulukkoaliohjelmaa. Ennen interpolointialiohjelman kutsumista pääohjelmaan on määritetty kyseisen aliohjelman käyttämät taulukon alkupään koordinaatit aA , bA ja cA sekä $x:n$, $y:n$ ja $z:n$ jakovälit $delta$, $deltb$ ja $deltc$. Aliohjelman kutsun yhteydessä on määritettävä haluttu taulukko, josta \bar{K} -kertoimen arvo interpoloidaan. Jos profiili on kiinnitetty jokaisesta kourusta, käytetään taulukkoa $\bar{K}1$, ja jos joka toisesta kourusta, valitaan taulukko $\bar{K}2$. Profiiliin liittyvät arvot hd , ld ja $theta$ saadaan lähtöarvotiedostosta. Lähtöarvotiedoston esimerkki löytyy liitteestä 3G.

Seuraavaksi pääohjelma kutsuu aliohjelmaa, joka laskee α - ja β -kertoimien arvot lähtöarvotiedostossa annettujen arvojen perusteella. Lopuksi ohjelma laskee eri tekijöistä aiheutuvat leikkausjoustavuuden arvot ja summaa ne yhteen.

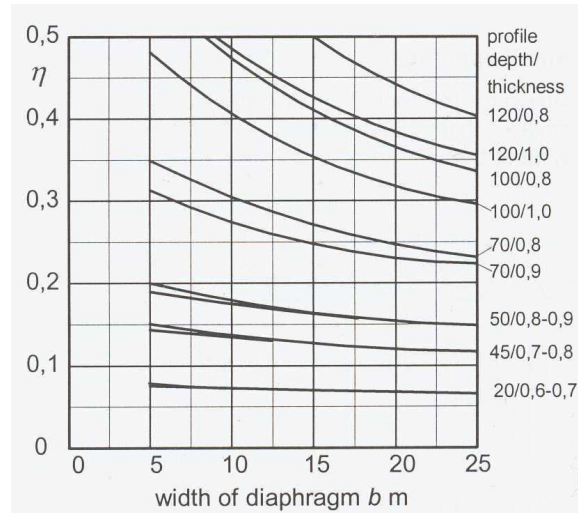
Leikkausjoustavuuden c laskeva ohjelma noudattaa seuraavaa toimintakaaviota.

1. Taulukoiden $\bar{K}1$, $\bar{K}2$ ja $alf1T$ haku.
2. K -kertoimen laskeminen aliohjelmalla valitun kiinnityksen mukaan.
3. α - ja β -kertoimien laskeminen aliohjelmalla.
4. Joustavuuden c laskeminen aliohjelmalla.

3.24 Leikkausjoustavuuden arviointi Höglundin käyrästön avulla

Höglundin kirjassa (Höglund 2002, s. 22) on esitetty diagrammi (Kuva 3.4) rakenteen leikkausjoustavuuden arvioimista varten. Diagrammin antamat arvot leikkausjoustavuudelle ovat hyvin epätarkkoja, joten sitä voidaan käyttää vain alustavaan suunnitteluun tai tarkistuksiin, kun varsinainen suunnittelu on jo tehty. Diagrammi antaa

vakion η arvot arvioimalla b :n pituisen levyjäykisteen leikkausjoustavuutta, kun pääkannattajan pituus on a .



Kuva 3.4 Vakio η kattojäykisteen leikkausjoustavuuden arvioimiseksi. Leikkausjoustavuus saadaan

$$c = \eta \cdot a / bt. \text{ (Höglund 2002, s. 22)}$$

Diagrammia voidaan käyttää seuraavien ehtojen toteutuessa:

- Orsiväli on määritetty katelevyn kestävyys mukaan, kun lumikuorma on $1,5 \text{ kN/m}^2$.
- Levyn maksimipituus on 12m. Mikäli jäykistettävän alueen pituus on suurempi, levyjä on käytettävä enemmän.
- Levyt on kiinnitetty $\phi 6,3 \text{ mm}$ ruuveilla, yksi ruuvi jokaista levykourua kohden levyjen päissä ja päätyliimityksissä, yksi ruuvi jokaisessa kourussa sisäorsien kohdalla.
- Levyjen liittäminen toisiinsa sivuliimityksissä on tehty $\phi 5,5 \text{ mm}$ niiteillä tai $\phi 5,5 \text{ mm}$ ruuveilla 500 mm :n välein.
- Leikkausliittimiä on käytetty levyjen ja päädyn pääkannattajien välillä, mutta ei levyjen ja sisäpuolisten pääkannattajien välillä.
- Pääkannattajien etäisyys toisistaan on $6\text{--}16 \text{ m}$.

Diagrammin käyrät ovat ylärajoja levyille, joita Ruotsissa valmistetaan. Diagrammissa on siten esitetty käyrät profiilisyvyyksille 20, 45, 50, 100 ja 120. Muille profiileille diagrammia voidaan käyttää interpoloimalla harkitusti käyrien väliarvoja.

4. Levyjäykistys Timoshenko –palkkina

Levyjäykistetty katto toimii kuten vaakatasoon käännetty Timoshenko –palkki, jossa on korkea ja ohut uuma. Reunapalkit tai –orret ovat jäykistepalkin laipat. Rakennuksen tuuliristikoiden sijoittelusta riippuen kattojäykistepalkkia voidaan tarkastella joko kaksitukisena palkkina tai ulokepalkkina.

Kattojäykiste koostuu katelevystä, orsista ja reunapalkeista, pääkannattajista sekä näiden välisistä liitoksista. Katelevy voidaan asentaa joko orsien päälle tai suoraan pääkannattajien päälle. Kun katelevy on asennettu suoraan pääkannattajille, reunapalkit ottavat vastaan taivutusmomentin. Joissain tapauksissa rakennuksessa ei ole reunapalkkeja, jolloin katelevy ottaa vastaan myös momentin. Kun katelevy on asennettu rakennuksen pitkittäissuunnassa olevien orsien päälle, momentti jakaantuu kaikille orsille, mutta ensisijaisesti kahdelle uloimmaiselle. (Höglund 2002)

4.1 Päädyistä ja yhdeltä pitkältä sivulta jäykistetty katto

4.11 Rakennemalli

Päädyistä ja yhdeltä pitkältä sivulta jäykistetyn kattorakenteen ajatellaan toimivan kaksitukisena Timoshenko -palkkina. Yleisessä tapauksessa pilarit voivat sijaita mielivaltaisella jaolla, mutta niistä erikoistapauksena käsitellään tässä myös tasavälinen pilarijako.

4.12 Kuormitukset

Tarkasteltavassa tapauksessa otetaan huomioon pitkällä sivulla vaikuttava tuulikuorma, jota voidaan käsitellä tasan jakaantuneena kuormana tai se voidaan jakaa pistekuormiksi pilareiden kohdalle. Kuormituksen varmuuskertoimet otetaan huomioon Eurokoodin mukaisesti. Rakenteen omasta painosta aiheutuvia kuormia, lumikuormia, nosturikuormia tai lyhyellä sivulla vaikuttavia tuulikuormia ei tässä käsitellä.

4.13 Analyttinen ratkaisu tasaiselle kuormalle

Liitteessä 4A on johdettu tasaisen kuorman q kuormittaman kaksitukisen Timoshenko – palkin taipuman lauseke lähtien kiertymän ja taipuman differentiaaliyhtälöistä (2.7) ja (2.8). Ensin on määritetty kuormituksen aiheuttamat taivutusmomentin ja leikkausvoiman lausekkeet ja sijoitettu ne kiertymän ja taipuman differentiaaliyhtälöihin, jotka on ratkaistu. Integrointivakiot on saatu ottamalla huomioon, että kiertymä palkin keskellä ja taipuma palkin päädyssä ovat nollia.

Taipuman lausekkeeksi saatiin

$$v(x) = -\frac{1}{2B}q\left(\frac{Lx^3}{6} - \frac{x^4}{12}\right) + \frac{qL^3}{24B}x + \frac{q}{S}\left(\frac{L}{2}x - \frac{1}{2}x^2\right). \quad (4.1)$$

Palkin maksimitaipuma on sen keskellä ja sille saatiin

$$v_{\max} \equiv v\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{5qL^4}{384B} + \frac{qL^2}{8S}. \quad (4.2)$$

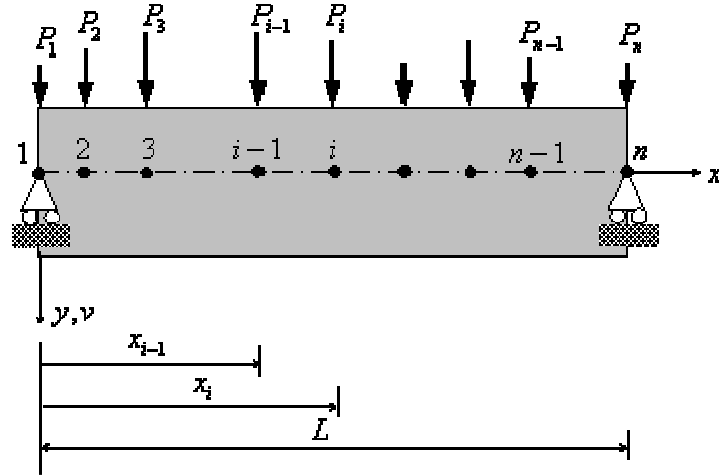
4.14 Analyttinen ratkaisu tasavälisille pistekuormille

Liitteessä 4B on määritetty palkin keskipisteen taipuma tasavälisille pistekuormille P luvussa 2 esitetyllä Timoshenko -palkin momenttipintamenetelmällä. Liitteessä on johdettu yksityiskohtaisesti kahden ja kolmen pistekuorman tapaukset. Yhden, neljän ja viiden pistekuorman tapauksista on esitetty vain tulokset taipumalle palkin keskellä.

Liitteessä 4C on vertailtu kaksitukisen Timoshenko –palkin keskipisteen taipumia, kun tasan jakautunut kuorma kohdistuu palkkiin välittömästi tai välillisesti ekvivalentteina pistekuormina. Tuloksista huomataan, että pistekuormien määrän kasvaessa palkin keskikohdan taipuma lähenee tasaisen kuorman kuormittaman palkin vastaavaa taipumaa. Tämä tarkastelu osoittaa, että levyjäykisteenä toimivan katon tuulikuormasta aiheutuvaa siirtymätilaa arvioitaessa voidaan käyttää tasaisen kuorman kuormittaman Timoshenko – palkin laskentamallia, kun pilarijako on tasainen.

4.15 Yksinkertainen laskenta-algoritmi epätasavälisille pistekuormille

Algoritmin yhtälöt



Kuva 4.1: Pistekuormin kuormitettu kaksitukinen Timoshenko -palkki

Kuva 4.1 esittää pistekuormin kuormitettua Timoshenko -palkkia. Liitteessä 4D on johdettu kaavat, joilla voidaan yksinkertaisilla peräkkäisillä laskutoimituksilla laskea epätasavälisin pistekuormin kuormitetun kaksitukisen Timoshenko -palkin kiertymät ja taipumat kuormien vaikutuspisteissä $i = 1, \dots, n$. Oletuksena on, että palkin taivutusjäykkyys B ja leikkausjäykkyys S ovat vakioita kuormien välisillä palkin osilla.

Liitteessä on aluksi johdettu palkin tasapainotarkastelulla tukireaktiolle T_1 kaava

$$T_1 = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^n P_i (x_n - x_i), \quad (4.3)$$

Liitteessä on tasapainoyhtälöihin perustuen johdettu kaavat

$$Q^{i+1} = Q^i - P_i, \quad (4.4)$$

$$M_{i+1} = M_i + Q^i (x_{i+1} - x_i), \quad (4.5)$$

joilla välin $i+1$ leikkausvoima Q^{i+1} ja pisteen $i+1$ taivutusmomentti M_{i+1} voidaan laskea, kun välin i leikkausvoima Q^i ja pisteen i taivutusmomentti M_i tunnetaan.

Liitteessä on myös johdettu kiertymän ja taipuman differentiaaliyhtälöihin (2.7) ja (2.8) perustuen kaavat

$$\varphi_{i+1} = \varphi_i - \frac{L^i}{2B^i}(M_i + M_{i+1}), \quad (4.6)$$

$$v_{i+1} = v_i + \varphi_i L^i + \frac{Q^i}{S^i} L^i - \frac{2M_i + M_{i+1}}{6B^i} L^{i^2}, \quad (4.7)$$

joilla voidaan laskea solmun $i+1$ kiertymä φ_{i+1} ja taipuma v_{i+1} , kun edellisen solmun kiertymä φ_i ja taipuma v_i tunnetaan.

Liitteessä on vielä johdettu palkin alkupään kiertymän kaava

$$\varphi_1 = \frac{1}{L} \left(-\sum_{i=1}^{n-1} \frac{Q^i}{S^i} L^i + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{2M_i + M_{i+1}}{6B^i} L^{i^2} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{L^i}{2B^i} (M_i + M_{i+1})(L - x_{i+1}) \right). \quad (4.8)$$

Malliohjelma (MATLAB)

Liitteessä 4E on malliohjelma, joka laskee epätasavälisin pistekuormin kuormitetun kaksitukisen Timoshenko –palkin kiertymien ja taipumien arvot kuormien vaikutuspisteissä. Malliohjelmaan syötetään lähtötiedoksi pistekuormien lukumäärä n , jäykisteen leikkausjoustavuus c , rakennuksen kokonaispituus L ja kuorma q . Lisäksi syötetään vektoreina kuormien vaikutuspisteiden koordinaatit x , välien taivutusjäykkyydet B ja pistekuormat P .

Algoritmin mukaisesti ohjelma laskee ensin tukireaktiot palkin molemmissa päissä. Tämän jälkeen tarvitaan leikkausvoiman ja momentin alkuarvot vasemmassa päässä. Alkuarvojen perusteella ohjelma laskee leikkausvoiman ja momentin arvot kuormituspisteissä. Kiertymän ja taipuman funktion määrittämiseksi ohjelma tarvitsee φ_1 :n arvon, jonka se laskee seuraavaksi. Lopuksi saadaan kiertymän ja taipuman arvot kuormituspisteissä.

Malliohjelma noudattaa seuraavaa toimintakaaviota:

1. Välien 1...n-1 pituudet

$$L^i = x_{i+1} - x_i \quad (4.9)$$

2. Tukireaktio tuella 1

$$T_1 = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^n P_i (x_n - x_i) \quad (4.10)$$

3. Leikkausvoima välillä 1 ja taivutusmomentti pisteessä 1

$$Q_1 = T_1 - P_1, M_1 = 0 \quad (4.11)$$

4. Leikkausvoima väleillä 2...n-1 ja taivutusmomentti pisteissä 2...n

$$Q^{i+1} = Q^i - P_i, M_{i+1} = M_i + Q^i L^i \quad (4.12)$$

5. Kiertymä tuella 1

$$\varphi_1 = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^{n-1} \left[-\frac{Q^i L^i}{S^i} + \frac{L^i}{2B^i} (L - x_{i+1}) (M_i + M_{i+1}) + \frac{(L^i)^2}{6B^i} (2M_i + M_{i+1}) \right] \quad (4.13)$$

6. Kiertymä pisteissä 2...n

$$\varphi_{i+1} = \varphi_i - \frac{L^i}{2B^i} (M_i + M_{i+1}) \quad (4.14)$$

7. Taipuma tuella 1 $v_1 = 0$

8. Taipuma pisteissä 2...n

$$v_{i+1} = v_i + \varphi_i L^i + \frac{Q^i}{S^i} L^i - \frac{2M_i + M_{i+1}}{6B^i} (L^i)^2 \quad (4.15)$$

4.2 Yhdestä päädystä ja pitkiltä sivuilta jäykistetty katto

4.21 Rakennemalli

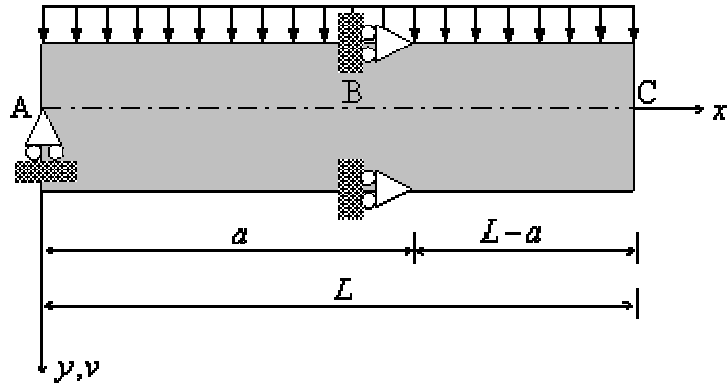
Päädystä ja kahdelta pitkältä sivulta jäykistetyin kattorakenteen ajatellaan toimivan ulokemaisena Timoshenko –palkkina, jossa toinen pää on vapaasti tuettu, ja pitkien sivujen jäykistykset estävät palkin kiertymisen etäisyydellä a palkin tuetusta päästä. Kuormitustapauksina käsitellään tässä tasainen kuorma ja epätasaväliset pistekuormat.

4.22 Kuormitukset

Tarkasteltavassa tapauksessa otetaan huomioon pitkällä sivulla vaikuttava tuulikuorma, jota voidaan käsitellä tasan jakaantuneena kuormana tai se voidaan jakaa pistekuormiksi pilareiden kohdalle. Kuormituksen varmuuskertoimet otetaan huomioon Eurokoodin

mukaisesti. Rakenteen omasta painosta aiheutuvia kuormia, lumikuormia, nosturikuormia tai lyhyellä sivulla vaikuttavia tuulikuormia ei tässä käsitellä.

4.23 Analyttinen ratkaisu tasaiselle kuormalle



Kuva 4.2: Tasaisen kuorman kuormittama ulokemainen Timoshenko –palkki

Liitteessä 4F on johdettu kuvassa 4.2 esitetyn tasaisen kuorman kuormittaman ulokemaisen Timoshenko –palkin taipumafunktio lähtien yleisistä kiertymän ja taipuman differentiaaliyhtälöistä (2.7) ja (2.8). Ensin on määritetty kuormituksen aiheuttamat taivutusmomentin ja leikkausvoiman lausekkeet pisteen $x = a$ molemmiin puolin ja sijoitettu ne kiertymän ja taipuman lausekkeisiin. Integrointivakiot on saatu ottamalla huomioon, että kiertymä pisteessä $x = a$ ja taipuma palkin vasemmassa päässä ovat nollia.

Taipumalle välillä $0 < x < a$ saatiin

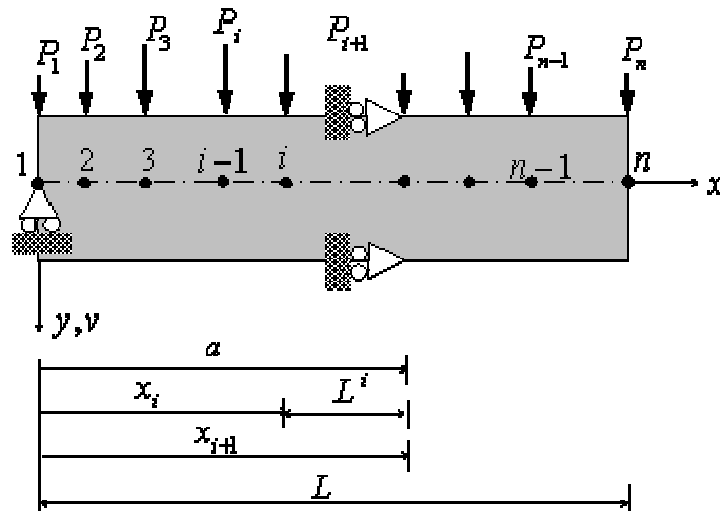
$$v(x) = -\frac{1}{24B}q(4Lx^3 - x^4) + \frac{1}{6B}q(3La^2 - a^3)x + \frac{q}{S}\left(Lx - \frac{1}{2}x^2\right) \quad (4.16)$$

ja välillä $a < x < L$

$$v(x) = -\frac{1}{24B}q(4Lx^3 - x^4 - 6L^2x^2) + \frac{1}{6B}q(3La^2 - a^3 - 3L^2a)x + \frac{q}{S}\left(Lx - \frac{1}{2}x^2\right) + \frac{qL^2a^2}{4B}. \quad (4.17)$$

4.24 Yksinkertainen laskenta-algoritmi epätasavälisille pistekuormille

Algoritmin yhtälöt



Kuva 4.3: Pistekuormin kuormitettu ulokemainen Timoshenko –palkki

Kuvassa 4.3 esitetyn ulokepalkin tapauksessa pätevät pääosin samat kaavat, jotka on johdettu liitteessä 4D kaksitukiselle Timoshenko –palkille. Tässä tapauksessa tukireaktiot T_1 ja M_a saadaan kuitenkin lausekkeista

$$T_1 = \sum_{i=1}^n P_i, \quad M_a = \sum_{i=1}^n P_i x_i. \quad (4.18)$$

Malliohjelma (MATLAB)

Liitteessä 4G on malliohjelma, joka laskee epätasavälisin pistekuormin kuormitetun ulokemaisen Timoshenko –palkin kiertymien ja taipumien arvot kuormien vaikutuspisteissä. Malliohjelmaan syötetään lähtötiedoksi pilareiden lukumäärä n , jäykisteen leikkausjoustavuus c , rakennuksen kokonaispituus L , kuorma q ja tukimomentin solmun numero at . Lisäksi syötetään vektoreina pilareiden sijaintikoordinaatit x , taivutusjäykkyydet B ja pistekuormat P .

Ohjelma laskee ensin tukireaktion palkin vasemmassa reunassa sekä tukimomentin M_0 . Tämän jälkeen tarvitaan leikkausvoiman ja momentin alkuarvot vasemmassa päässä.

Alkuarvojen perusteella ohjelma laskee leikkausvoiman ja momentin arvot tukimomentin kohdalla sekä sen oikealla ja vasemmalla puolella kuormituspisteissä. Kiertymän ja taipuman funktion määrittämiseksi ohjelma tarvitsee φ_1 :n arvon, jonka se laskee seuraavaksi. Lopuksi saadaan kiertymän ja taipuman arvot kuormituspisteissä.

Malliohjelma noudattaa seuraavaa toimintakaaviota:

1. Välien $1 \dots n-1$ pituudet

$$L^i = x_{i+1} - x_i \quad (4.19)$$

2. Tukireaktio tuella 1, tukimomentti pisteessä a

$$T_1 = \sum_{i=1}^n P_i, \quad M_a = \sum_{i=1}^n P_i x_i \quad (4.20)$$

3. Leikkausvoima välillä 1 ja taivutusmomentti pisteessä 1

$$Q_1 = T_1 - P_1, \quad M_1 = 0 \quad (4.21)$$

4. Leikkausvoima väleillä $2 \dots n-1$

$$Q^{i+1} = Q^i - P_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-2 \quad (4.22)$$

5. Pisteessä $x = a$ vasemman puoleinen taivutusmomentti pisteissä $2 \dots k$

$$M_{i+1}^v = M_i^v + Q^i L^i, \quad i = 1, \dots, a-1 \quad (4.23)$$

6. Pisteessä $x = a$ oikean puoleinen taivutusmomentti pisteessä k

$$M^o = M^v + M_a \quad (4.24)$$

7. Pisteessä $x = a$ oikean puoleinen taivutusmomentti pisteissä $a+1 \dots n$

$$M_{i+1}^o = M_i^o + Q^i L^i, \quad i = a, \dots, n-1 \quad (4.25)$$

8. Kiertymä pisteessä a

$$\varphi_a = 0 \quad (4.26)$$

9. Kiertymä pisteissä $a-1 \dots 1$

$$\varphi_i = \varphi_{i+1} + \frac{L^i}{2B^i} (M_i^v + M_{i+1}^v), \quad i = a-1, \dots, 1 \quad (4.27)$$

10. Kiertymä pisteissä $a+1 \dots n$

$$\varphi_{i+1} = \varphi_i - \frac{L^i}{2B^i} (M_i^o + M_{i+1}^o), \quad i = a, \dots, n-1 \quad (4.28)$$

11. Taipuma tuella 1 $v_1 = 0$

12. Taipuma pisteissä 2...a

$$v_{i+1} = v_i + \varphi_i L^i + \frac{Q^i}{S^i} L^i - \frac{2M_i^v + M_{i+1}^v}{6B^i} (L^i)^2, \quad i = 1, \dots, a-1 \quad (4.29)$$

13. Taipuma pisteissä a+1...n

$$v_{i+1} = v_i + \varphi_i L^i + \frac{Q^i}{S^i} L^i - \frac{2M_i^o + M_{i+1}^o}{6B^i} (L^i)^2, \quad i = a, \dots, n-1 \quad (4.30)$$

5. Tarkka elementtimenetelmä Timoshenko -palkin ratkaisemiseksi

Jäykistepalkin taipuman määrittämiseksi voidaan käyttää tarkkaa elementtimenetelmää, jota voidaan hyödyntää myös staattisesti määräämättömiä tapauksia tutkittaessa. Elementtimenetelmässä kullakin elementillä on jäykkyysmatriisi ja kuormitusvektori, joista koetaan koko rakennetta käsittävä jäykkyysmatriisi ja kuormitusvektori. Kun yhtälöryhmästä on määritetty vapausastesiirtymät, voidaan laskea myös momentti, leikkausvoima ja taipuma elementin alueella.

5.1 Yhtälöt ja laskelman periaate

5.11 C¹-jatkuvan Timoshenko -palkkielementin jäykkyysmatriisi ja kuormitusvektori

Oletetaan, että elementti on tasajäykkä eli taivutusjäykkyys B ja leikkausjäykkyys S ovat elementin alueella vakioita. Tässä yhteydessä riittää myös oletus, että jakautunut poikittainen kuorma on elementin alueella vakio.

Elementin jäykkyysmatriisin ja kuormitusvektorin johtaminen näillä oletamuksilla on esitetty tarkasti liitteessä 5A. Tässä esitetään vain tulokset.

Elementin jäykkyysmatriisi on

$$[K]^e = \frac{B}{L^3(1+\kappa)} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & (4+\kappa)L^2 & -6L & (2-\kappa)L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & (2-\kappa)L^2 & -6L & (4+\kappa)L^2 \end{bmatrix}, \quad (5.1)$$

missä

$$\kappa = \frac{12B}{SL^2}, \quad (5.2)$$

ja kuormitustermivektori on

$$\{FK\}^e = \begin{Bmatrix} -qL/2 \\ -qL^2/12 \\ -qL/2 \\ qL^2/12 \end{Bmatrix}. \quad (5.3)$$

5.12 Rakenteen jäykkyysmatriisin ja kuormitustermivektorin kokoamisprosessi

Rakenteen jäykkyysmatriisi ja kuormitustermivektori kootaan elementin jäykkyysmatriisin ja kuormitustermivektorin alkioista elementtimenetelmän tavanomaisen kokoamismenettelyä käyttäen.

Rakenteen jäykkyysmatriisin kokoamiskaava on

$$K_{ij} = \sum_e K_{rs}^e. \quad (5.4)$$

Kaavassa summaus käy yli niiden elementtien, jotka liittyvät systeemivapausasteisiin i ja j . Indeksit r ja s ovat elementin e systeemivapausasteita i ja j vastaavat elementtivapausastenumerot.

Rakenteen kuormitustermivektorin kokoamiskaava on

$$FK_i = \sum_e FK_r^e. \quad (5.5)$$

Kaavassa summaus käy yli niiden elementtien, jotka liittyvät systeemivapausasteeseen i , sekä r on elementin e systeemivapausasteita i vastaava elementtivapausastenumero.

5.13 Elementtien sisäisten suureiden laskeminen

Elementtien sisäisten suureiden lausekkeet on johdettu liitteessä 5A. Leikkausvoiman ja taivutusmomentin lausekkeet ovat

$$Q(x) = -\frac{B}{L^2(1+\kappa)} \left(\frac{12}{L} v_1 + 6\phi_1 - \frac{12}{L} v_2 + 6\phi_2 \right) + qL \left(\frac{1}{2} - \xi \right), \quad (5.6)$$

$$M(x) = \frac{B}{L^2(1+\kappa)} ((6-12\xi)v_1 + ((4+\kappa)L - 6L\xi)\varphi_1 - (6-12\xi)v_2 + \\ + ((2-\kappa)L - 6L\xi)\varphi_2) + \frac{qL^2}{2}(\xi - \xi^2 - \frac{1}{6}), \quad (5.7)$$

ja taipuman lauseke on

$$v(x) = \frac{1}{(1+\kappa)}(2\xi^3 - 3\xi^2 - \kappa\xi + \kappa + 1)v_1 + \\ + \frac{1}{(1+\kappa)}(L\xi^3 - \frac{(4+\kappa)L}{2}\xi^2 + \frac{\kappa L}{2}\xi + L\xi)\varphi_1 - \frac{1}{(1+\kappa)}(2\xi^3 - 3\xi^2 - \kappa\xi)v_2 + \\ + \frac{1}{(1+\kappa)}(L\xi^3 - \frac{(2-\kappa)L}{2}\xi^2 - \frac{\kappa L}{2}\xi)\varphi_2 + \frac{qL^4}{24B}(\xi^4 - 2\xi^3 + \xi^2) + \frac{qL^2}{2S}(\xi - \xi^2). \quad (5.8)$$

Näissä kaavoissa on käytetty lyhennysmerkintää

$$\xi = \frac{x}{L}. \quad (5.9)$$

5.2 Malliohjelma (MATLAB)

5.21 Lähtötieto-ohjelmat

Elementtimenetelmän lähtötieto-ohjelmaan (liite 5B) syötetään taivutusjäykkyys B , leikkausjoustavuus c , elementtien pituudet l ja kuorma q . Ohjelma laskee annettujen tietojen perusteella palkin leikkausjäykkyyden S . Lisäksi annetaan systeemisolmujen ja elementtien lukumäärät $nsysol$ ja $nele$.

Elementtien ominaisuuksista kootaan matriisi $elom$, jossa ensimmäinen sarake kertoo elementin taivutusjäykkyyden, toinen sarake leikkausjäykkyyden ja kolmas sarake elementtiin vaikuttavan mahdollisen tasaisen kuorman. Solmujen koordinaateista kootaan vektori $solkoo$. Kuhunkin elementtiin liittyvät solmujen numerot merkitään vektoriksi $nosol$. Annettujen vapausasteiden lukumäärä on $nanv$. Niiden ominaisuudet merkitään matriisiin $anvso$, jossa ensimmäinen sarake kertoo solmun numeron, toinen sarake vapausasteen numeron (1 on pystysiirtymä ja 2 on kiertymä) ja kolmas sarake vapausasteen arvon kyseisessä solmussa. Vapausasteisiin liittyvien kuormitusten lukumäärä on $nank$. Niiden ominaisuudet merkitään matriisiin $ankso$, jossa ensimmäinen

sarake kertoo solmun numeron, toinen sarake vapausasteen numeron ja kolmas sarake vapausastevoiman arvon kyseisessä solmussa.

5.22 Laskentaohjelma

Pääohjelma

Elementtimenetelmän pääohjelma (liite 5C) ratkaisee palkin siirtymämenetelmällä käyttäen elementtimenetelmän systematiikkaa. Ensin ohjelma laskee systeemivapausasteiden lukumäärän *nsyvap* ja systeemivapausastenumerotaulukon *novap*. Sitten ohjelma laskee annettujen vapausastevoimien ja vapausasteiden numero- ja arvotaulukot $[noank, ank]$ ja $[noanv, anv]$. Seuraavaksi ohjelma kokoaa systeemimatriisin *ks* ja -vektorin *rs* sekä huomioi annetut vapausastekuormat systeemivektorissa ja annetut vapausasteet systeemimatriisissa ja -vektorissa. Lopuksi ohjelma ratkaisee yhtälöryhmän ja laskee elementin sisäisiä suureita taipuman, taivutusmomentin ja leikkausvoiman tasavälisellä jaolla annetuissa pisteissä.

Pääohjelma noudattaa seuraavaa toimintakaaviota:

1. Systeemivapausasteiden lukumäärä *nsyvap*.
2. Systeemivapausasteiden numerotaulukko *novap* aliohjelmalla *lasvap*.
3. Annettujen vapausastevoimien numero- ja arvotaulukko aliohjelmalla *lasanv*.
4. Annettujen vapausasteiden numero- ja arvotaulukko aliohjelmalla *lasanv*.
5. Systeemimatriisin *ks* määrittäminen harvaksi ja nollaaminen.
6. Systeemivektorin *rs* nollaaminen.
7. Systeemimatriisin *ks* kokoaminen.
8. Systeemivektorin *rs* kokoaminen.
9. Annettujen vapausastekuormien huomioiminen systeemivektorissa.
10. Annettujen vapausasteiden huomioiminen systeemimatriisissa ja -vektorissa.
11. Tuntemattomien suureiden ratkaiseminen yhtälöryhmästä $[ks]\{a\} = \{rs\}$.
12. Elementin sisäiset suureet taipuma, taivutusmomentti ja leikkausvoima elementin alueella tasavälisellä jaolla annetuissa pisteissä aliohjelmalla *lasele*.

Funktioaliohjelmat

Elementtimenetelmän pääohjelma käyttää funktioaliohjelmia, jotka on listattu liitteessä 5D ja esitellään tässä lyhyesti.

Aliohjelma *kokks* kokoaa systeemimatriisin *ks* elementtimatriisin *ke* alkioista, jotka aliohjelma *muoke* muodostaa elementti kerrallaan. Vastaavasti aliohjelma *kokrs* kokoaa systeemivektorin *rs* elementtivektorin *re* alkioista, jotka aliohjelma *muore* muodostaa elementti kerrallaan. Aliohjelma *lasele* laskee taipuman, taivutusmomentin ja leikkausvoiman arvot kunkin elementin sisällä tasavälein sijaitsevista pisteistä.

Aliohjelma *muoke* noudattaa seuraavaa toimintakaaviota:

1. Elementin solmun numerot i_1 ja i_2 .
2. Solmujen koordinaatit $solkoo(i_1)$ ja $solkoo(i_2)$.
3. Elementin pituus: $L = solkoo(i_2) - solkuu(i_1)$.
4. Elementin taivutusjäykkyys B .
5. Elementin leikkausjäykkyys S .
6. Elementtimatriisissa tarvittava apusuure $\kappa = \frac{12B}{SL^2}$.
7. Apusuure $A = \frac{(4 + \kappa)L^2 B}{L^3(1 + \kappa)}$.
8. Apusuure $B1 = \frac{(2 - \kappa)L^2 B}{L^3(1 + \kappa)}$.
9. Apusuure $C = \frac{6LB}{L^3(1 + \kappa)}$.
10. Apusuure $D = \frac{12B}{L^3(1 + \kappa)}$.

$$11. \text{ Elementtimatriisi } ke = \begin{bmatrix} D & C & -D & C \\ C & A & -C & B1 \\ -D & -C & D & -C \\ C & B1 & -C & A \end{bmatrix}.$$

Aliohjelma *muore* noudattaa seuraavaa toimintakaaviota:

1. Elementin solmun numerot i_1 ja i_2 .
2. Solmujen koordinaatit $solkoo(i_1)$ ja $solkoo(i_2)$.
3. Elementin pituus: $L = solkoo(i_2) - solkuu(i_1)$.
4. Kuormitus elementillä q .
5. Elementin vapausasteisiin liittyvät kuormitustermit:

$$re(1) = \frac{qL}{2}, re(2) = \frac{qL^2}{12}, re(3) = \frac{qL}{2}, re(4) = -\frac{qL^2}{12}.$$

Aliohjelma *kokks* noudattaa seuraavaa toimintakaaviota:

1. Elementin jäykkyyssmatriisin ke laskeminen aliohjelmalla.
2. Systeemivapausasteisiin is ja js liittyvät elementtivapausasteiden ie ja je termit summataan systeemimatriisiksi ks .

Aliohjelma *kokrs* noudattaa seuraavaa toimintakaaviota:

1. Elementin kuormitusvektorin re laskeminen aliohjelmalla.
2. Systeemivapausasteeseen is liittyvistä elementtivapausasteen ie termeistä kootaan systeemivektori rs .

Aliohjelma *lasele* noudattaa seuraavaa toimintakaaviota:

1. Elementin taivutusjäykkyys B .
2. Elementin leikkausjäykkyys S .
3. Elementin kuorma q_0 .
4. Elementin solmun numerot i_1 ja i_2 .
5. Elementin solmujen koordinaatit $x_1 = solkoo(i_1)$ ja $x_2 = solkoo(i_2)$.
6. Elementin pituus: $L = x_2 - x_1$.
7. Elementin vapausasteiden numerot i_1, i_2, i_3 ja i_4 .
8. Elementin vapausastesiirtymät a_1, a_2, a_3 ja a_4 .
9. Laskelmissa tarvittava apusuure $\kappa = \frac{12B}{SL^2}$.
10. Elementin jakaminen pienempiin osiin, koordinaatit $X(iele, ip)$.
11. Pienempien osien elementtikoordinaatit x .
12. Leikkausvoima ja taivutusmomentti elementin pisteessä x_1

$$V_1 = \frac{B}{L^2(1+\kappa)} (6\varphi_1 + 6\varphi_2 + \frac{12}{L}v_1 - \frac{12}{L}v_2) - \frac{qL}{2},$$

$$M_1 = \frac{B}{L^2(1+\kappa)} ((4+\kappa)L\varphi_1 + (2-\kappa)L\varphi_2 + 6v_1 - 6v_2) - \frac{1}{12}qL^2.$$

13. Taipumat elementin alueella

$$v(x) = -\frac{1}{B} \left(\frac{1}{2}M_1L^2x^2 - \frac{1}{24}qL^4x^4 - \frac{1}{6}V_1L^3x^3 \right) + \varphi_1Lx + \frac{1}{S}(-V_1Lx - \frac{1}{2}qL^2x^2) + v_1.$$

14. Momentti elementin alueella

$$M(x) = M_1 - \frac{1}{2}qL^2x^2 - V_1Lx.$$

15. Leikkausvoima elementin alueella

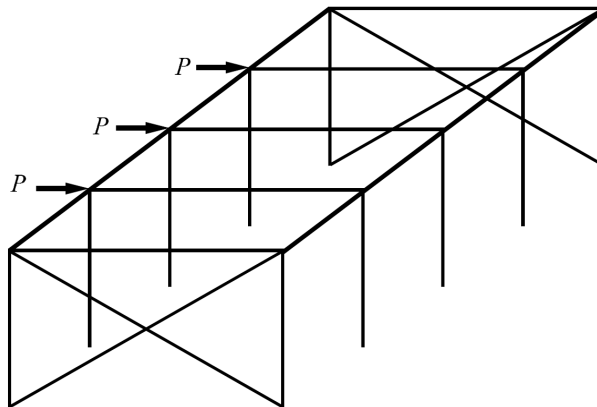
$$Q(x) = -V_1 - qLx.$$

16. Kunkin elementin taipuman, taivutusmomentin ja leikkausvoiman kokoaminen halutuissa elementin pisteissä.

6. Kehien jäykkyyden vaikutus yksikerroksisen rakennuksen siirtymiin

6.1 Kehä jousena

Edellisissä luvuissa käsiteltyä jäykistesysteemiä ja sen taipumia voidaan tarkastella vielä siten, että otetaan huomioon kehien vaikutus siirtymiin. Kehien voidaan olettaa toimivan jousina, joilla on tietty joustavuus s ¹. ECCS:n mukainen menetelmä kehien huomioon ottamiseksi perustuu Davieksen ja Bryanin kehittämään käsinlaskentamenetelmään, jota käsitellään lyhyesti seuraavaksi. Laskentamenetelmää käytettäessä on syytä huomata, että se soveltuu vain tasaväliselle kehäjaolle.

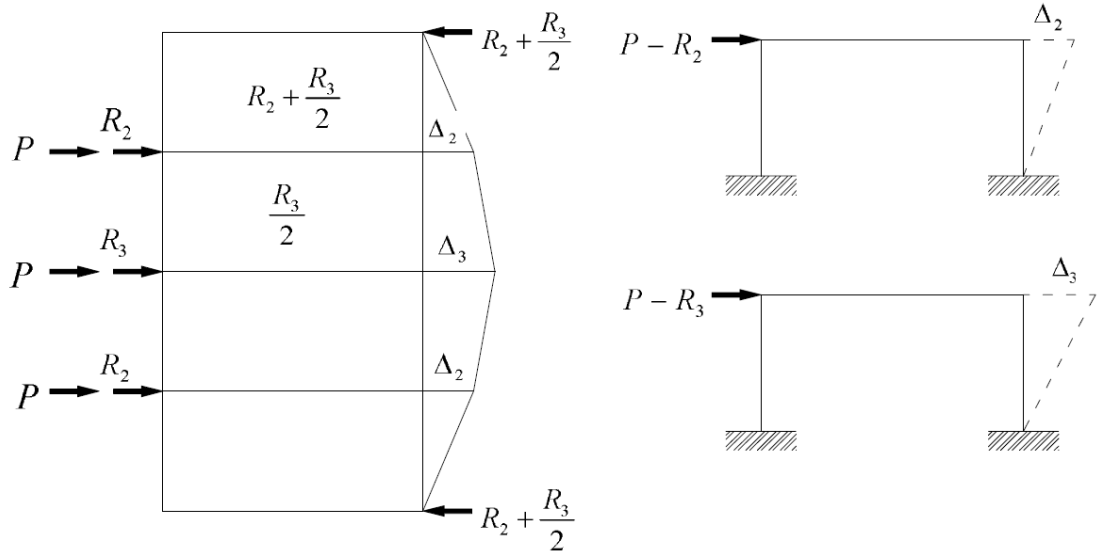


Kuva 6. 1: Levykattuinen kehärakenne

Otetaan esimerkiksi kuvassa **Error! Reference source not found.** oleva rakenne, jossa on kolme välikehää, ja päätyjen kehät on jäykistetty sivusiirtymättömiksi ristikoilla. Kattorakennetta käsitellään yhtenäisenä levyjäykisteenä, jonka joustavuus on c . Käytetään laskelmissa suhteellista joustavuutta, joka on $\psi = c/s$. Jokaisessa välikehässä voima P jaetaan voimaksi R_i , joka otetaan vastaan levyjäykisteellä, ja voimaksi $P - R_i$, joka

¹ Davieksen ja Bryanin kirjassa kehän joustavuudelle käytetään merkintää k . Koska merkinnällä k ymmärretään tavallisesti jousivakiona, käytetään tässä yhteydessä joustavuudelle merkintää s ja liitteessä 6C johdetulle kehän jousivakiolle merkintää k . Joustavuus saadaan jousivakion avulla, kun $s = 1/k$.

otetaan vastaan kehällä. Eri osien voimat ja taipumat on esitetty kuvassa 6.2. (Davies, J. M. ja Bryan, E. R. 1982, s. 54)



Kuva 6.2: Rakenteen siirtymät ja voimakomponentit, vasemmalla levyissä ja oikealla kehissä

Kehien ja levyjen väliset voimat R_2 ja R_3 ovat staattisesti määräämättömiä ja ne täytyy määrittää olettamalla yhteensopivuus taipumille Δ_2 ja Δ_3 . Saadaan siis

$$\Delta_2 = s(P - R_2) = c(R_2 + \frac{R_3}{2}) \quad (6.1)$$

$$\Delta_3 = s(P - R_3) = \Delta_2 + \frac{cR_3}{2}. \quad (6.2)$$

Ratkaisemalla nämä yhtälöt ja käyttämällä suhteellista joustavuutta $\psi = c/s$, saadaan

$$R_2 = P \left(\frac{\psi + 2}{\psi^2 + 4\psi + 2} \right), \quad R_3 = P \left(\frac{2}{\psi^2 + 4\psi + 2} \right), \quad (6.3)$$

joista saadaan maksimileikkausvoimalle levyssä

$$R_2 + \frac{1}{2}R_3 = P \left(\frac{\psi + 3}{\psi^2 + 4\psi + 2} \right). \quad (6.4)$$

Kehien voimiksi saadaan nyt

$$\text{Kehässä 2: } P - R_2 = P \left(\frac{\psi^2 + 3\psi}{\psi^2 + 4\psi + 2} \right) = \eta_2 P \quad (6.5)$$

$$\text{Kehässä 3: } P - R_3 = P \left(\frac{\psi^2 + 4\psi}{\psi^2 + 4\psi + 2} \right) = \eta_3 P. \quad (6.6)$$

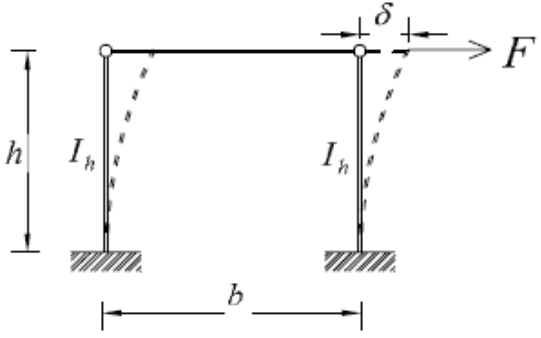
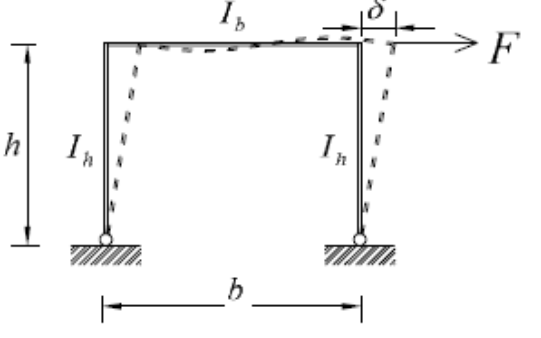
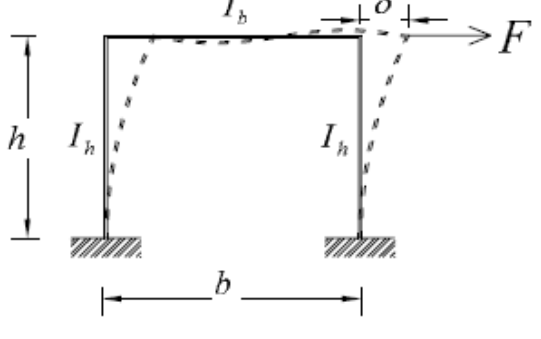
Kertoimet η_2 ja η_3 voidaan nähdä pienennyskertoimina voimille, taivutusmomenteille ja taipumille ja ne riippuvat kertoimen ψ arvosta. Tietenkään ei ole järkevää ratkaista kaikkia vastaavia ongelmia tällä menetelmällä käsin laskien, koska yhtälöiden määrä kasvaa samalla, kun kehien määrä kasvaa. Kertoimien η arvoja on siten taulukoitu tietokonelaskennalla 12 kehään asti suurelle määrällä suhteellisia joustavuuksia (Davies, J. M. ja Bryan, E. R. 1982, s. 190-191). Näitä taulukoita käyttämällä kehiltä levyjäykisteelle tuleva voima on

$$R_i = P(1 - \eta_i) \quad (6.7)$$

ja summaamalla nämä voimat keskeltä rakennusta voidaan laskea leikkausvoimat. Yleisen tapauksen ratkaisemiseksi esitetään luvussa 6.3 voimamenetelmään perustuva laskenta-algoritmi, jolla voidaan ottaa huomioon kehien vaikutus taipumaan.

Kehän joustavuus s saadaan käänteislukuna kehän jousivakiosta k . Suunnittelun helpottamiseksi kehän jousivakiolle k voidaan johtaa kaavat eri tapauksissa. Ne on esitetty taulukossa 6.1. Kaavojen johtaminen on esitetty liitteessä 6C.

Taulukko 6. 1: Kehän jousivakion kaavat

	$k = \frac{6EI_h}{h^3}$
	$k = \frac{6EI_h}{h^3} \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \frac{I_h b}{I_b h}}$
	$k = \frac{24EI_h}{h^3} \frac{1 + \frac{1}{6} \frac{I_h b}{I_b h}}{1 + \frac{2}{3} \frac{I_h b}{I_b h}}$

6.2 Likimääräiskaavat pilarien jäykkyyden vaikutuksen arvioimiseksi

Kehien vaikutusta jäykisteen taipumaan voidaan arvioida likimääräisesti olettamalla jäykiste kimmoisalla alustalla olevaksi palkiksi. Tällöin alustaluku \bar{k} saadaan kehien jousivakioista jakamalla ne koko jäykistepalkin matkalle. Johdetaan nyt kimmoisalla alustalla olevan Timoshenko –palkin teoriaan perustuvat likikaavat, joilla voidaan arvioida

levyjäykistetyin katon siirtymii. Kaavojen tarkat johdot on esitetty liitteessii 6B, joten tiiessii niii kiisitelliiin vain piiipiiiteittiiin.

Kaksitukisen palkin tapauksessa taipuman tiiydellisen yhtiiin yleistii ratkaisu on homogeeniyhtiiin yleisen ratkaisun ja tiiydellisen yhtiiin yksitiyisratkaisun summa. Sille saadaan

$$v(x) = C_1 \cosh \alpha x \cos \beta(L-x) + C_2 \cosh \alpha(L-x) \cos \beta x + C_3 \sinh \alpha x \sin \beta(L-x) + C_4 \sinh \alpha(L-x) \sin \beta x + \frac{q_0}{k}. \quad (6.8)$$

Reunaehdot ovat

$$v(0) = 0, \quad v(L) = 0, \quad M(0) = 0 \quad \text{ja} \quad M(L) = 0. \quad (6.9)$$

Ottamalla huomioon reunaehdot, saadaan integroimisvakioille lausekkeet

$$C_1 = \frac{-q_0}{\bar{k}(\cos \beta L + \cosh \alpha L)} = C_2 \quad \text{ja} \quad (6.10)$$

$$C_4 = -(\alpha^2 - \beta^2 - \frac{\bar{k}}{S}) \left(\frac{q_0}{\bar{k} 2\alpha\beta(\cos \beta L + \cosh \alpha L)} \right) = C_3. \quad (6.11)$$

Kun niii sijoitetaan yhtiiin 6.8, saadaan taipuman lausekkeeksi

$$v(x) = \frac{q_0}{k} \left\{ 1 - \frac{1}{2\alpha\beta(\cos \beta L + \cosh \alpha L)} [2\alpha\beta(\cosh \alpha x \cos \beta x' + \cosh \alpha x' \cos \beta x) + \left(\alpha^2 - \beta^2 - \frac{\bar{k}}{S} \right) (\sinh \alpha x \sin \beta x' + \sinh \alpha x' \sin \beta x)] \right\}, \quad (6.12)$$

missii $x' = L - x$.

Ulokepalkin tapauksessa voidaan kiiyttii vastaaavasti kaavan 6.8 mukaista taipuman tiiydellisen yhtiiin yleistii ratkaisua. Tiiessii tapauksessa reunaehdot ovat

$$v(0) = 0, \quad \varphi(0) = 0, \quad Q(L) = 0 \quad \text{ja} \quad M(L) = 0. \quad (6.13)$$

Reunaehdot huomioimalla saadaan integroimisvakioille C_1 ja C_2 lausekkeet

$$C_1 = \frac{\frac{\bar{k}d}{4S\alpha\beta}co + \left[\alpha^2(1 - \frac{\sqrt{\bar{k}B}}{S}) - \beta^2(1 + \frac{\sqrt{\bar{k}B}}{S}) \right] chshsi + \alpha\beta(1 - \frac{\sqrt{\bar{k}B}}{S})co(sh^2 + si^2)}{\frac{\bar{k}d}{4S\alpha\beta}(ch^2 - co^2) - \alpha\beta \left[(1 + \frac{\sqrt{\bar{k}B}}{S})ch^2 + (1 - \frac{\sqrt{\bar{k}B}}{S})co^2 \right] (sh^2 + si^2)} \frac{q}{k} \quad (6.14)$$

ja

$$C_2 = -\left\{ \frac{\frac{\bar{k}d}{4S\alpha\beta}ch + \left[\alpha^2(1 - \frac{\sqrt{\bar{k}B}}{S}) - \beta^2(1 + \frac{\sqrt{\bar{k}B}}{S}) \right] shsico - \alpha\beta(1 + \frac{\sqrt{\bar{k}B}}{S})ch(sh^2 + si^2)}{\frac{\bar{k}d}{4S\alpha\beta}(ch^2 - co^2) - \alpha\beta \left[(1 + \frac{\sqrt{\bar{k}B}}{S})ch^2 + (1 - \frac{\sqrt{\bar{k}B}}{S})co^2 \right] (sh^2 + si^2)} \right\} \frac{q_0}{k} \quad (6.15)$$

missä

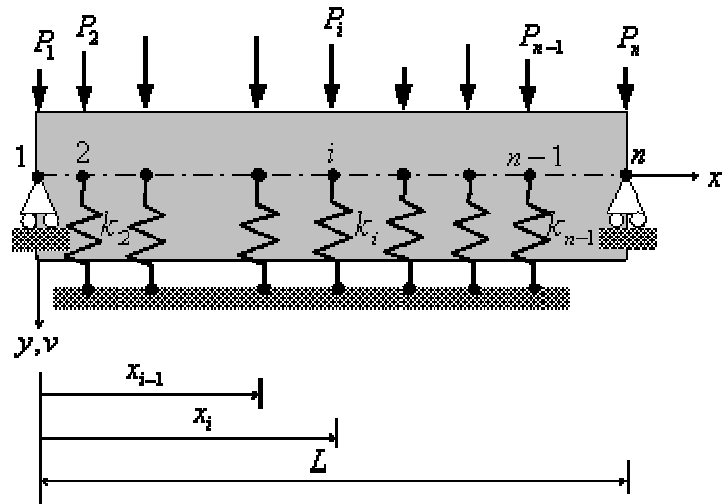
$$d = \alpha^2(1 - \frac{\sqrt{\bar{k}B}}{S})si^2 + \beta^2(1 + \frac{\sqrt{\bar{k}B}}{S})sh^2. \quad (6.16)$$

Sijoittamalla integroimisvakiot (6.14) ja (6.15) taipuman yhtälöön (6.8), saadaan maksimitaipumalle kohdassa $x = L$ lauseke

$$v_{\max} = \left\{ 1 + \frac{\left[\alpha^2(1 - \frac{\sqrt{\bar{k}B}}{S}) - \beta^2(1 + \frac{\sqrt{\bar{k}B}}{S}) \right] (ch^2 - co^2)shsi + 2\alpha\beta coch(sh^2 + si^2)}{\frac{\bar{k}d}{4S\alpha\beta}(ch^2 - co^2) - \alpha\beta \left[(1 + \frac{\sqrt{\bar{k}B}}{S})ch^2 + (1 - \frac{\sqrt{\bar{k}B}}{S})co^2 \right] (sh^2 + si^2)} \right\} \frac{q_0}{k}. \quad (6.17)$$

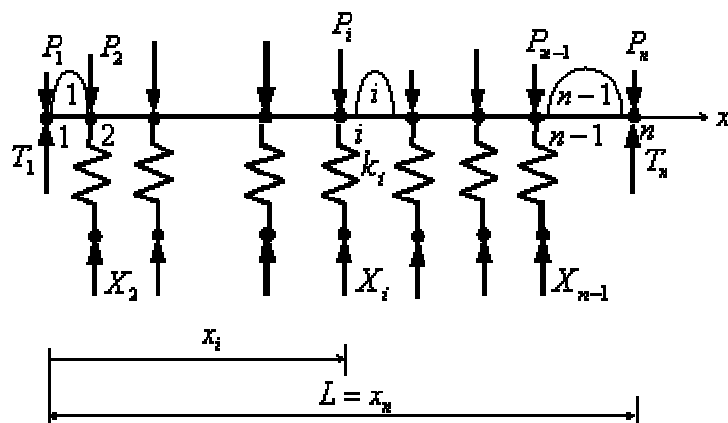
6.3 Laskentamallit pilarien jäykkyyden vaikutuksen arvioimiseksi

6.31 Kimmoisilla tuilla olevan Timoshenko palkin ratkaiseminen voimamenetelmällä



Kuva 6.3: Pistekuormin kuormitettu joustavilla tuilla oleva kaksitukinen Timoshenko palkki

Kuva 6.3 esittää pistekuormin kuormitettua kaksitukista Timoshenko palkkia, joka on tuettu päätyjen välissä joustavilla tuilla. Otetaan staattiseksi perusmuodoksi systeemi, jossa jousten päät on ajateltu irrotetuiksi tuiltaan, ja staattisesti määräämättömiksi suureiksi jousien $i = 2, \dots, n-1$ päiden tukireaktiot X_i , $i = 2, \dots, n-1$, kuten kuvassa 6.4.



Kuva 6.4: Staattisesti määräämättömät suureet: jousien päiden tukireaktiot X_i , $i = 2, \dots, n-1$.

Merkitään ulkoisesta kuormituksesta aiheutuvaa staattisesti määrätyn perusmuodon jousen i alapään pystysuoraa siirtymää symbolilla δ_{i0} sekä pelkästään jouseen j vaikuttavasta tukireaktiosta $X_j = 1$ staattisesti määrätyn perusmuodon jousen i alapään pystysuoraa siirtymää symbolilla δ_{ij} . Nämä siirtymät saadaan laskemalla palkin pisteiden $i = 2, \dots, n-1$ taipumat v_{i0} ensin ulkoisesta kuormituksesta ja sitten pisteiden $i = 2, \dots, n-1$ taipumat v_{ij} vuorotellen kuormista $X_j = 1$, $j = 2, \dots, n-1$. Tämä laskelma voidaan suorittaa aikaisemmin kehitetyllä staattisesti määrätyn kaksitukisen Timoshenko palkin taipumien laskenta-algoritmilla, kun rakenteen kuormituksiksi otetaan vuorotellen

$$\bar{P}_j = -1, \bar{P}_i = 0, i = 1, \dots, n \quad i \neq j. \quad (6.18)$$

Staattisesti määräämättömiä suureita vastaaville siirtymille saadaan

$$\begin{aligned} \delta_{i0} &= -v_{i0}, \quad i = 2, \dots, n-1 \\ \delta_{ii} &= -v_{ii} + \frac{1}{k_i}, \quad i = 2, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (6.19)$$

$$\delta_{ij} = -v_{ij}, \quad i = 2, \dots, n-1, \quad j = 2, \dots, n-1, \quad i \neq j.$$

Staattisesti määrätyn perusmuodon jousen alapäiden siirtymille saadaan superpositioperiaatteella nyt

$$\delta_i = \delta_{i0} + \sum_{j=2}^{n-1} \delta_{ij} X_j, \quad j = 2, \dots, n-1 \quad (6.20)$$

Yhteensopivuusehdot jousen alapäässä ovat $\delta_i = 0$, josta seuraa yhtälöryhmä

$$\sum_{j=2}^{n-1} \delta_{ij} X_j + \delta_{i0} = 0, \quad j = 2, \dots, n-1, \quad (6.21)$$

joka on matriisimuodossa

$$\begin{bmatrix} \delta_{22} & \delta_{23} & \cdots & \delta_{2,n-1} \\ \delta_{32} & \delta_{33} & & \delta_{3,n-1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \delta_{n-1,2} & \delta_{n-1,3} & \cdots & \delta_{n-1,n-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_{n-1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\delta_{20} \\ -\delta_{30} \\ \vdots \\ -\delta_{n-1,0} \end{Bmatrix}. \quad (6.22)$$

Tämä on yhtälöryhmä, josta staattisesti määräämättömät suureet X_i , $i = 2, \dots, n-1$ voidaan määrittää. Jotta staattisesti määräämättömien suureiden ratkaiseminen tapahtuisi ohjelmallisesti mahdollisimman helposti, voidaan menetellä siten, että ratkaistaankin yhtälöryhmän (6.22) sijasta yhtälöryhmä

$$[A]\{X\} = \{B\}, \quad (6.23)$$

missä

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{22} & \delta_{23} & \cdots & \delta_{2,n-1} & 0 \\ 0 & \delta_{32} & \delta_{33} & & \delta_{3,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \delta_{n-1,2} & \delta_{n-1,3} & \cdots & \delta_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \{X\} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_{n-1} \\ X_n \end{bmatrix}, \{B\} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\delta_{20} \\ -\delta_{30} \\ \vdots \\ -\delta_{n-1,0} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Tässä yhtälöryhmässä on kaksi tuntematonta enemmän, mutta kerroinmatriisiin $[A]$ ja vakiovektorin $\{B\}$ kokoaminen on suoraviivaisempaa. Staattisesti määräämättömien suureiden lisäksi saadaan pystyvektorin $\{X\}$ ensimmäiselle ja viimeiselle alkion tulokset $X_1 = 0$ ja $X_n = 0$, joilla on pientä ohjelmallista hyötyä.

Ottamalla lopuksi huomioon yhteydet (6.19) yhtälöryhmän (6.23) kerroinmatriisi ja vakiovektori saavat muodon

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -v_{22} + \frac{1}{k_2} & -v_{23} & \cdots & -v_{2,n-1} & 0 \\ 0 & -v_{32} & -v_{33} + \frac{1}{k_3} & & -v_{3,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -v_{n-1,2} & -v_{n-1,3} & \cdots & -v_{n-1,n-1} + \frac{1}{k_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \{B\} = \begin{bmatrix} 0 \\ v_{20} \\ v_{30} \\ \vdots \\ v_{n-1,0} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.24)$$

Kun staattisesti määräämättömät suureet X_i , $i = 2, \dots, n-1$ nyt tunnetaan, voidaan palkin taipumat ohjelmallisesti mukavimmin määrittää seuraavasti: Koska jouset on oletettu painottomiksi, niiden päiden tukireaktiot kohdistuvat suoraan palkkiin ylöspäin

suuntautuvina voimina. Näin ne pienentävät palkkiin kohdistuvien kuormien P_i vaikutusta. Palkkiin kohdistuvat alaspäin suuntautuvat voimat ovat nyt

$$\bar{P}_i = P_i - X_i, \quad i = 2, \dots, n-1. \quad (6.25)$$

Merkitään vielä $\bar{P}_1 = P_1$ ja $\bar{P}_n = P_n$. Nyt palkin taipumat (ja myös rasitukset) voidaan ratkaista ymmärtämällä se kaksitukiseksi palkiksi, johon kohdistuu epätasavälisesti jakautuneet pistekuormat \bar{P}_i , $i = 1, \dots, n$, jotka voidaan laskea yksinkertaisesti kaavalla

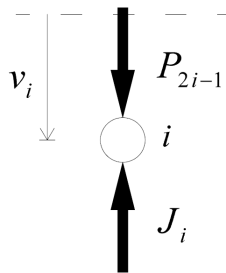
$$\bar{P}_i = P_i - X_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (6.26)$$

Voidaan siis taas käyttää staattisesti määrätyn kaksitukisen Timoshenko palkin taipumien laskenta-algoritmia.

6.32 Kimmoisilla tuilla olevan Timoshenko palkin ratkaiseminen elementtimenetelmällä

Palkin elementtimallin kuhunkin solmuun i liittyy kaksi systeemivapausastetta, taipuma $v_i \equiv a_{2i-1}$ ja kiertymä $\varphi_i \equiv a_{2i}$. Taipumavapausasteeseen voidaan liittää jousi ja kiertymävapausasteeseen taivutusjousi. Tässä tarkastellaan vain taipumavapausasteeseen liittyvää tavallista joustia.

Merkitään solmuun i liittyvän jousen jousivakiota symbolilla k_i . Jos solmu saa taipuman $v_i \equiv a_{2i-1}$, kohdistuu jousesta solmuun i voima $J_i = k_i v_i = k_i a_{2i-1}$.



Kuva 6.3: Solmu i ja siihen kohdistuvat ulkoiset voimat

Tämä voima voidaan ymmärtää solmun i siirtymävapausasteeseen $2i-1$ liittyvän ulkoisen kuorman P_{2i-1} vähennykseksi, jolloin tämä kuorma onkin

$$\bar{P}_{2i-1} = P_{2i-1} - k_i a_{2i-1}. \quad (6.27)$$

Solmun i vapausastetta $2i - 1$ vastaavaksi yhtälöksi saadaan nyt

$$K_{2i-1,1}a_1 + \dots + K_{2i-1,M}a_M + FK_{2i-1} = \bar{P}_{2i-1} \quad (6.28)$$

josta seuraa

$$K_{2i-1,1}a_1 + \dots + (K_{2i-1,2i-1} + k_i)a_{2i-1} + \dots + K_{2i-1,M}a_M + FK_{2i-1} = P_{2i-1}. \quad (6.29)$$

Tämä yhtälö poikkeaa tavallisen palkin solmun i siirtymävapausastetta $2i - 1$ vastaavasta elementtimenetelmäyhtälöstä vain siinä, että yhtälöryhmän kerroinmatriisin diagonaalitermiin $K_{2i+1,2i+1}$ on lisätty solmuun i liittyvä jousivakio k_i .

Tästä voidaan päätellä, että solmun i siirtymävapausastetta $2i - 1$ vastaava jousi voidaan huomioida palkin elementtimenetelmäyhtälöissä lisäämällä systeemin jäykkyyismatriisiin vastaavaan diagonaalitermiin kyseinen jousivakio k_i .

6.33 Kimmoisen tuennan tuomat muutokset malliohjelmaan

Kappaleessa 4.15 esitettyä laskenta-algoritmia epätasavälisille pistekuormille voidaan käyttää hyväksi laadittaessa ohjelmaa, joka ottaa huomioon kehien vaikutuksen. Siinä tapauksessa algoritmista laaditaan aliohjelma, jota hyödynnetään ensin palkin pistekuormien aiheuttamien taipumien laskemiseen ja sitten jousitukien tuntemattomien suureiden sekä niiden aiheuttamien taipumien laskemiseen. Kun jousitukien tuntemattomien suureiden aiheuttamat taipumat vähennetään kaksitukisen palkin taipumista, saadaan tulokseksi halutut jäykisteen taipumat tapauksessa, joissa kehien vaikutus on huomioitu.

Aliohjelma *taipumat* on listattu liitteessä 6A ja se noudattaa seuraavaa toimintakaaviota:

1. Tukireaktio tuella 1

$$T_1 = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^n P_i(x_n - x_i)$$

2. Leikkausvoima välillä 1 ja taivutusmomentti pisteessä 1

$$Q_1 = T_1 - P_1, \quad M_1 = 0$$

3. Leikkausvoima väleillä 2...n-1 ja taivutusmomentti pisteissä 2...n

$$Q^{i+1} = Q^i - P_i, M_{i+1} = M_i + Q^i L^i$$

4. Kiertymä tuella 1

$$\varphi_1 = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^{n-1} \left[-\frac{Q^i L^i}{S^i} + \frac{L^i}{2B^i} (L - x_{i+1})(M_i + M_{i+1}) + \frac{(L^i)^2}{6B^i} (2M_i + M_{i+1}) \right]$$

5. Kiertymä pisteissä 2...n

$$\varphi_{i+1} = \varphi_i - \frac{L^i}{2B^i} (M_i + M_{i+1})$$

6. Taipuma tuella 1 $v_1 = 0$

7. Taipuma pisteissä 2...n

$$v_{i+1} = v_i + \varphi_i L^i + \frac{Q^i}{S^i} L^i - \frac{2M_i + M_{i+1}}{6B^i} (L^i)^2$$

Pääohjelma *tai* on listattu myös liitteessä 6A ja se noudattaa seuraavaa toimintakaaviota:

1. Välien 1...n-1 pituudet

$$L^i = x_{i+1} - x_i$$

2. Ulkoisista kuormista aiheutuvat taipumat aliohjelmalla
 3. Kunkin jousen yksikkövoiman aiheuttamat taipumat aliohjelmalla
 4. Kerroin matriisin A ja kuormitusvektorin b kokoaminen

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{22} & \delta_{23} & \cdots & \delta_{2,n-1} & 0 \\ 0 & \delta_{32} & \delta_{33} & & \delta_{3,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \delta_{n-1,2} & \delta_{n-1,3} & \cdots & \delta_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \{b\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\delta_{20} \\ -\delta_{30} \\ \vdots \\ -\delta_{n-1,0} \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

5. Tuntemattomien voimasuureiden X_i ratkaiseminen $A:n$ ja $b:n$ avulla
 6. Jousivoimien X_i vähentäminen ulkoisista kuormista P_i

$$\bar{P}_i = P_i - X_i, i = 2, \dots, n-1.$$

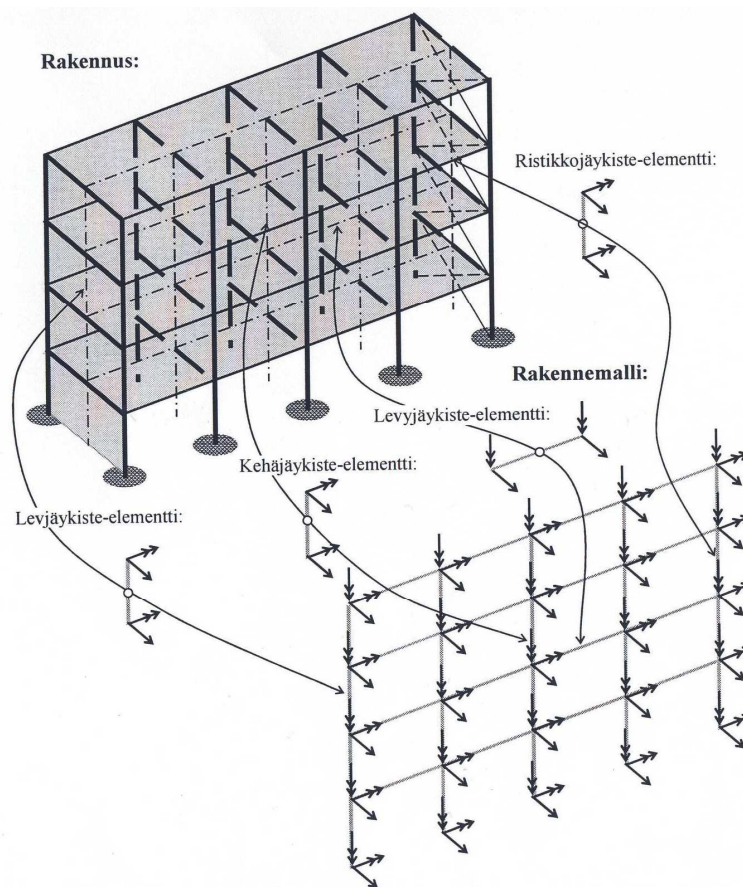
7. Taipumien laskeminen uusien voimien \bar{P}_i arvoilla aliohjelmalla

$$\bar{P}_i = P_i - X_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

7. Jäykiste-elementteihin perustuva useampikerroksisen rakennuksen rakennemalli

7.1 Jäykiste-elementteihin perustuva rakennemalli

Tarkastellaan useampikerroksista rakennusta, jonka jäykistyssysteemi koostuu levyjäykisteistä, kehäjäykisteistä ja ristikkojäykisteistä.



Kuva 7.1: Rakennuksen jäykistyssysteemin mallintaminen erilaisia jäykiste-elementtejä käyttäen

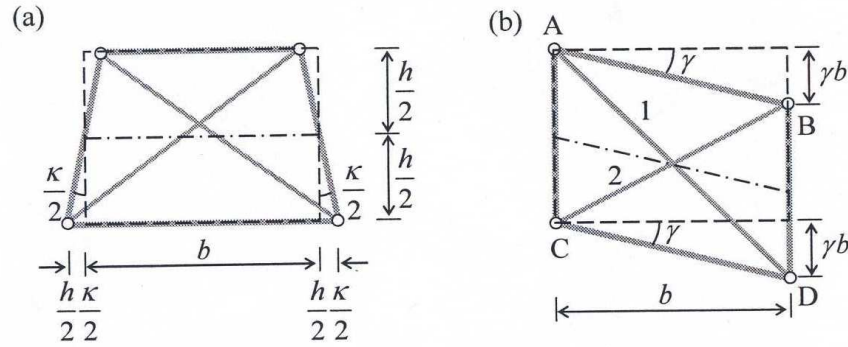
Jäykistelevyn mallintamista varten esiteltiin jo aiemmin Timoshenko –palkkiteoriaan perustuva levyjäykiste-elementti. Kehitetään nyt vastaavat Timoshenko –palkkiteoriaan perustuvat elementit, joilla voidaan mallintaa ristikko- ja kehäjäykisteet. Kutsutaan niitä vastaavasti ristikko- ja kehäjäykiste-elementeiksi. Kuva 7.1 havainnollistaa rakennuksen jäykistyssysteemin mallintamista levy-, ristikko- ja kehäjäykiste-elementeillä.

7.2 Jäykiste-elementit

7.21 Ristikkojäykiste-elementti

Ajatellaan ristikkojäykiste-elementin muodonmuutoksen tapahtuvan puhtaan taivutusmuodonmuutoksen ja leikkausmuodonmuutoksen summana. Kuva 7.2(a) esittää ristikkojäykiste-elementin taivutusmuodonmuutosta. Siinä ristikon ala- ja yläpaarten venymille saadaan

$$\varepsilon_a = \kappa \frac{h}{2}, \quad \varepsilon_y = -\kappa \frac{h}{2}. \quad (7.1)$$



Kuva 7.2: Ristikkojäykiste-elementin (a) taivutus- ja (b) leikkausmuodonmuutos

Taivutusmuodonmuutoksessa ristikkojäykiste-elementin muut sauvat eivät veny. Kuva 7.2(b) esittää ristikkojäykiste-elementin leikkausmuodonmuutosta. Diagonaalisauvoille 1 ja 2 voidaan kirjoittaa pituudenmuutosyhtälöt

$$\overbrace{(u_D - u_A)}^0 (x_D - x_A) + \overbrace{(v_D - v_A)}^b \overbrace{(y_D - y_A)}^h = \varepsilon_{d1} d^2, \quad (7.2)$$

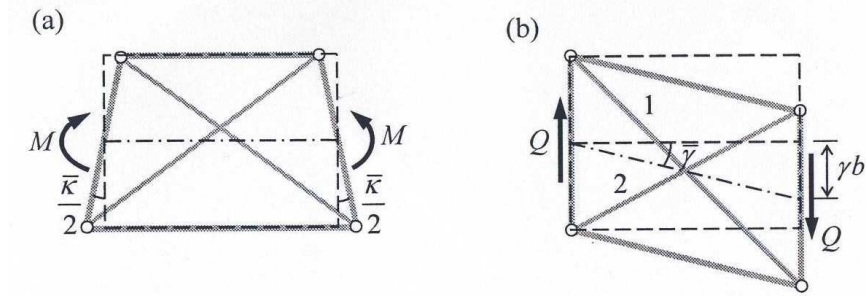
$$\overbrace{(u_B - u_C)}^0 (x_B - x_C) + \overbrace{(v_B - v_C)}^b \overbrace{(y_B - y_{AC})}^h = \varepsilon_{d2} d^2, \quad (7.3)$$

missä $d = \sqrt{b^2 + h^2}$ on diagonaalisauvan pituus. Näistä saadaan diagonaalisauvojen venymille

$$\varepsilon_{d1} = \frac{bh}{d^2} \gamma, \quad \varepsilon_{d2} = -\frac{bh}{d^2} \gamma. \quad (7.4)$$

Leikkausmuodonmuutoksessa ristikkojäykiste-elementin muut sauvat eivät veny.

Määritetään nyt ristikkojäykiste-elementin taivutus- ja leikkausjäykkyydet käyttämällä hyväksi virtuaalisen työn periaatetta.



Kuva 7.3: Ristikkojäykiste-elementin virtuaalinen (a) taivutus- ja (b) leikkausmuodonmuutos

Otetaan ristikkojäykiste-elementin virtuaaliseksi siirtymätilaksi virtuaalista käyristymää $\bar{\kappa}$ vastaava siirtymätila ja todelliseksi voimatilaksi taivutusmomenttia M vastaava voimatila. Taivutusmomentin tekemän ulkoisen virtuaalisen työn on oltava yhtä suuri kuin sauvavoimien tekemä virtuaalinen työ. Saadaan siis

$$\begin{aligned} M\bar{\kappa}b &= S_a\bar{\epsilon}_a b + S_y\bar{\epsilon}_y b = EA_b\epsilon_a\bar{\epsilon}_a b + EA_b\epsilon_y\bar{\epsilon}_y b \\ &= EA_b \frac{\kappa h}{2} \frac{\bar{\kappa} h}{2} b + EA_b \frac{\kappa h}{2} \frac{\bar{\kappa} h}{2} b = E \frac{A_b h^2}{2} \kappa \bar{\kappa} b. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Lausekkeessa (7.5) S_a ja S_y ovat jäykisteristikon ala- ja yläpaarteen sauvavoimat ja A_b on ala- ja yläpaarteen pinta-ala. Näin taivutusmomentin ja käyristymän yhteydeksi saadaan

$$M = E \frac{A_b h^2}{2} \kappa. \quad (7.6)$$

Otetaan ristikkojäykiste-elementin virtuaaliseksi siirtymätilaksi virtuaalista liukumakulmaa $\bar{\gamma}$ vastaava siirtymätila ja todelliseksi voimatilaksi leikkausvoimaa Q vastaava voimatila. Leikkausvoiman tekemän ulkoisen virtuaalisen työn tulee olla yhtä suuri kuin sauvavoimien tekemä virtuaalinen työ. Saadaan siis

$$Q\bar{\gamma}b = S_{d1}\bar{\epsilon}_{d1}d + S_{d2}\bar{\epsilon}_{d2y}d = EA_d\epsilon_{d1}\bar{\epsilon}_{d1}d + EA_d\epsilon_{d2}\bar{\epsilon}_{d2}d$$

$$= EA_d \frac{bh}{d^2} \gamma \frac{bh}{d^2} \bar{\gamma} d + EA_d \left(-\frac{bh}{d^2} \gamma\right) \left(-\frac{bh}{d^2} \bar{\gamma}\right) d = 2EA_d \frac{b^2 h^2}{d^3} \gamma \bar{\gamma} \quad (7.7)$$

Lausekkeessa (7.7) S_{d1} ja S_{d2} ovat jäykisteristikon diagonaalisauvojen sauvavoimat ja A_d on diagonaalisauvojen pinta-ala. Näin leikkausvoiman ja liukumakulman yhteydeksi saadaan

$$Q = 2EA_d \frac{bh^2}{d^3} \gamma. \quad (7.8)$$

Näistä saadaan ristikkojäykiste-elementin taivutus- ja leikkausjäykkyyksille tulokset

$$B = E \frac{A_b h^2}{2}, \quad S = 2EA_d \frac{bh^2}{d^3}. \quad (7.9)$$

Jos ristikkojäykiste-elementissä on vain yksi diagonaali tai jos diagonaalit eivät kestä puristusta (teräsvaijerit), leikkausjäykkyyden lausekkeesta jätetään kerroin 2 pois.

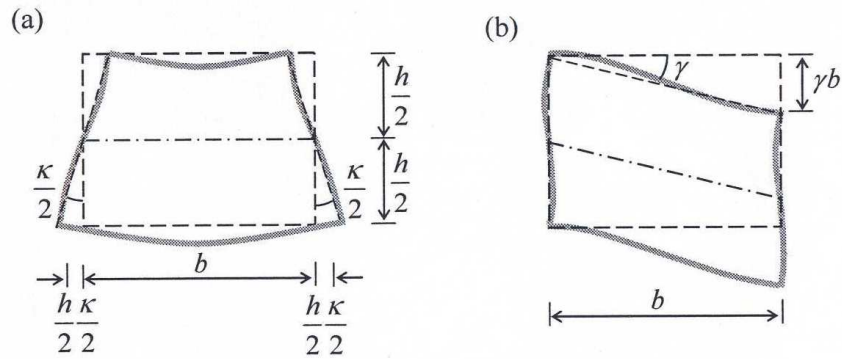
7.22 Levyjäykiste-elementti

Levyjäykiste-elementille voidaan ohjelmassa käyttää luvussa 3 johdettuja tuloksia

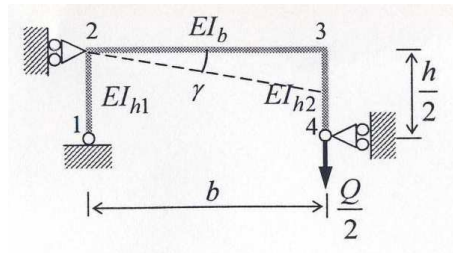
$$B = E \frac{A_b h^2}{2}, \quad S = \frac{b}{c'}. \quad (7.10)$$

7.23 Kehäjäykiste-elementti

Ajatellaan kehäjäykiste-elementin muodonmuutoksen tapahtuvan puhtaan taivutus- ja leikkausmuodonmuutoksen summana. Kuva 7.4(a) esittää kehäjäykiste-elementin taivutusmuodonmuutosta. Sauvojen aksiaalijäykkyydet ovat niiden taivutusjäykkyyksiin nähden verrattain suuret. Jos sauvojen taivutusjäykkyydet jätetään tarkastelussa kokonaan huomioonottamatta, kehän nurkkiin voidaan ajatella nivelet ja vaakasauvat toimivat kuten nivelsauvat. Tarkastelusta tulee samanlainen kuin ristikkojäykisteen tapauksessa ja taivutusjäykkyydelle saadaan tulos (7.9a). Tällä tavoin yksinkertaistettu malli tuottaa taivutusmuodonmuutokselle varmallalla puolella olevan tuloksen. Kuva 7.4(b) esittää ristikkojäykiste-elementin leikkausmuodonmuutosta. Tarkastelu voidaan symmetrian vuoksi rajoittaa kuvan 7.5 mukaisesti tuetun kehän yläosaan.



Kuva 7.4: Kehäjäykiste-elementin (a) taivutus- ja (b) leikkausmuodonmuutos



Kuva 7.5: Kehäjäykisteen yläosa

Sovelletaan kulmanmuutosmenetelmää. Sauvanpäämomenteille saadaan

$$M_{21} = \frac{3EI_{h1}}{h/2} \varphi_2 - \frac{3EI_{h1}}{h/2} \overbrace{\psi_{12}}^0 = \frac{6EI_{h1}}{h} \varphi_2 \quad (7.11)$$

$$M_{23} = \frac{4EI_b}{b} \varphi_2 + \frac{2EI_b}{b} \varphi_3 - \frac{6EI_b}{b} \overbrace{\psi_{23}}^\gamma = \frac{4EI_b}{b} \varphi_2 + \frac{2EI_b}{b} \varphi_3 - \frac{6EI_b}{b} \gamma \quad (7.12)$$

$$M_{32} = \frac{4EI_b}{b} \varphi_3 + \frac{2EI_b}{b} \varphi_2 - \frac{6EI_b}{b} \overbrace{\psi_{32}}^\gamma = \frac{2EI_b}{b} \varphi_2 + \frac{4EI_b}{b} \varphi_3 - \frac{6EI_b}{b} \gamma \quad (7.13)$$

$$M_{34} = \frac{3EI_{h2}}{h/2} \varphi_2 - \frac{3EI_{h2}}{h/2} \overbrace{\psi_{34}}^0 = \frac{6EI_{h2}}{h} \varphi_3. \quad (7.14)$$

Nurkkien 2 ja 3 momenttitasapainoyhtälöistä $M_{21} + M_{23} = 0$ ja $M_{32} + M_{34} = 0$ seuraa yhtälöpari

$$\left(\frac{3I_{h1}}{h} + \frac{2I_b}{b}\right) \varphi_2 + \frac{I_b}{b} \varphi_3 = \frac{3I_b}{b} \gamma \quad (7.15)$$

$$\frac{I_b}{b}\varphi_2 + \left(\frac{2I_b}{b} + \frac{3I_{h2}}{h}\right)\varphi_3 = \frac{3I_b}{b}\gamma. \quad (7.16)$$

Sen ratkaisuksi saadaan

$$\varphi_2 = \frac{2I_b}{bD} \left(\frac{3I_{h2}}{h} + \frac{I_b}{b}\right)\gamma, \quad \varphi_3 = \frac{2I_b}{bD} \left(\frac{3I_{h1}}{h} + \frac{I_b}{b}\right)\gamma \quad (7.17)$$

missä

$$D = \left(\frac{I_b}{b} + \frac{I_{h1}}{h}\right)\left(\frac{I_b}{b} + \frac{3I_{h2}}{h}\right) + \left(\frac{I_b}{b} + \frac{3I_{h1}}{h}\right)\left(\frac{I_b}{b} + \frac{I_{h2}}{h}\right). \quad (7.18)$$

Siirtymäyhtälöstä $M_{23} + M_{32} + Qb/2 = 0$ seuraa yhtälö

$$\frac{6EI_b}{b}\varphi_2 + \frac{6EI_b}{b}\varphi_3 - \frac{12EI_b}{b}\gamma + \frac{Qb}{2} = 0. \quad (7.19)$$

Kun tästä ratkaistaan q ja sijoitetaan tulokseen kiertymien φ_2 ja φ_3 lausekkeet, saadaan

$$Q = \frac{12EI_b}{b^2}(2\gamma - \varphi_2 - \varphi_3) = \frac{24EI_b}{b^2}\left(1 - \frac{I_b}{bD}\left(3\frac{I_{h1} + I_{h2}}{h} + 2\frac{I_b}{b}\right)\right)\gamma. \quad (7.20)$$

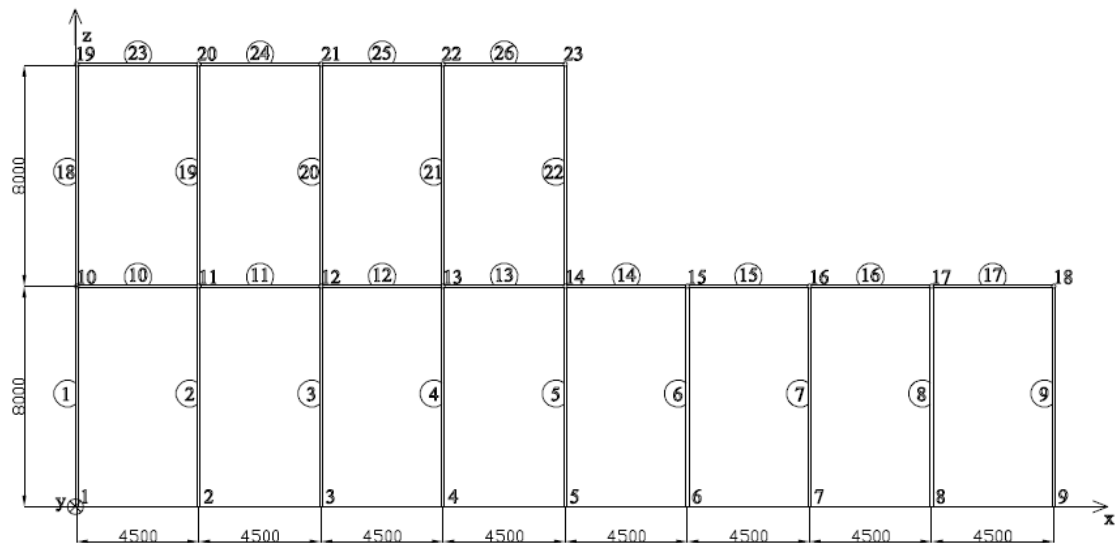
Kehäjäykiste-elementille on nyt saatu tulokset

$$B = E\frac{A_b h^2}{2}, \quad S = \frac{24EI_b}{b^2}\left(1 - \frac{I_b}{bD}\left(3\frac{I_{h1} + I_{h2}}{h} + 2\frac{I_b}{b}\right)\right). \quad (7.21)$$

7.3 Rakennemallin muodostuminen jäykiste-elementeistä

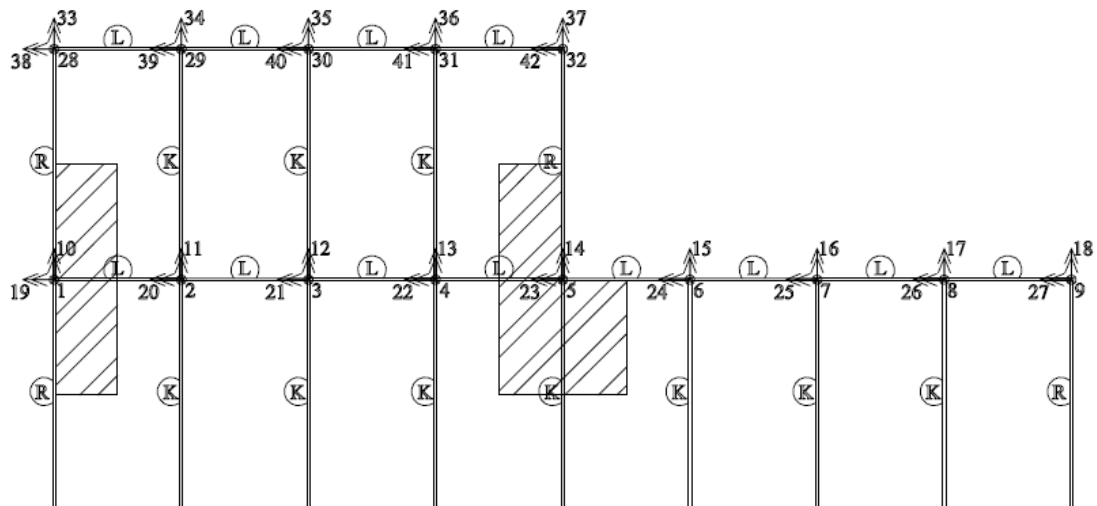
Kuvassa 7.1 esitettiin periaate, jonka mukaan rakennemalli muodostetaan jäykiste-elementeistä. Mallissa on käytetty ristikko- ja kehäelementtejä pystyrakenteissa ja levyelementtejä vaakarakenteissa. Luvussa 7.4 esitetyllä ohjelmalla voidaan toki määrittää elementtien suunnat myös niin, että levyelementtejä voidaan käyttää pystyrakenteissa ja ristikko- ja kehäelementtejä vaakarakenteissa.

Tutkitaan seuraavaksi kuvan 7.6 mukaista kaksikerroksista rakennusta. Rakennuksen pituus on 36m ja leveys 20m. Molempien kerrosten korkeudet ovat 8m.



Kuva 7.6: Kaksikerroksisen rakennuksen elementtien ja solmujen numerointi

Aluksi määritetään rakennuksen systeemisolmujen sijainti ja numerot. Tämän jälkeen voidaan elementit sijoitella niin, että kuhunkin elementtiin liittyy kaksi systeemisolmua. Kuvasta 7.6 nähdään, että elementtiin 1 liittyvät systeemisolmunumerot ovat 1 ja 10, elementtiin 2 liittyvät 2 ja 11 jne.



Kuva 7.7: Kaksikerroksisen rakennuksen elementit ja systeemivapausasteet

Kuhunkin elementtiin liittyy neljä elementtivapausastetta, kummankin pään kiertymä ja siirtymä, jotka otetaan huomioon vastaavina systeemivapausasteina. Kuvasta 7.7 nähdään, että elementtiin 10 liittyvät systeemivapausasteet ovat 1, 10, 2 ja 11, elementtiin 11

liittyvät 2, 11, 3 ja 12 jne. Ensimmäisen kerroksen pystyelementeille on merkitty vain toisen pään systeemivapausasteet, koska toisessa päässä taipuma ja kiertymä ovat nollija. Viivoitettu alue kuvaa kuormaa kyseiselle solmulle. Yhden osa-alueen kuormitusta merkitään symbolilla P , jolloin esimerkiksi solmulle 10 tuleva kuorma on $2P$ ja solmulle 14 tuleva kuorma $3P$. Kuvaan 7.7 on lisäksi merkitty kirjaimilla elementtien tyypit: ristikko (R), kehä (K) ja levy (L).

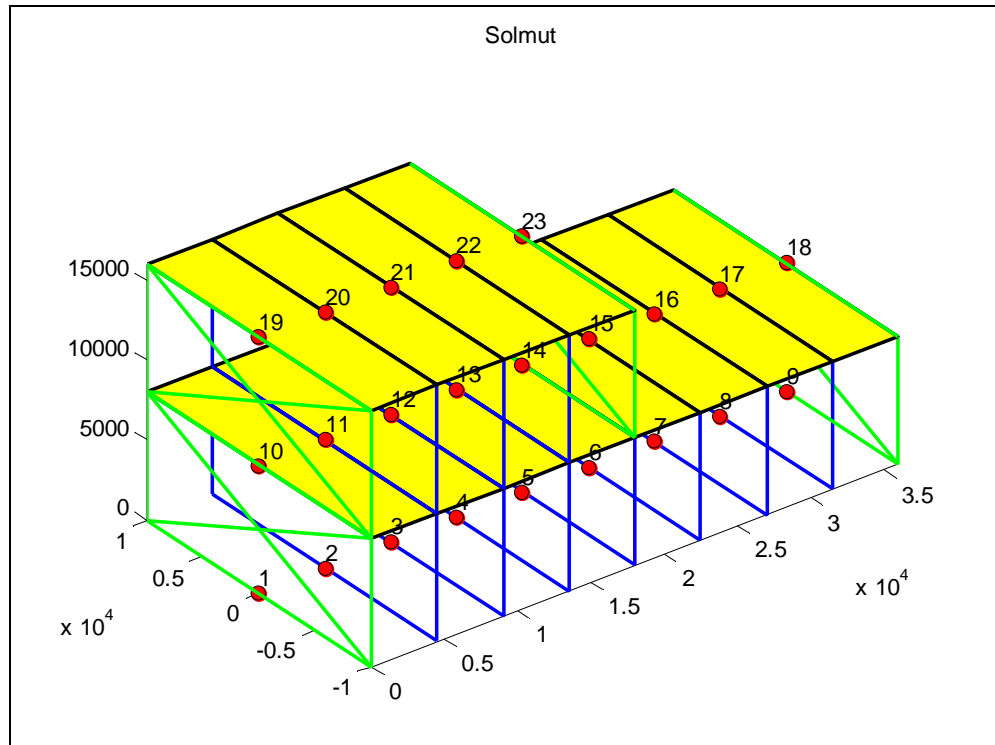
Luvussa 7.4 käsitellään tarkemmin esimerkin käyttämää elementtiohjelmaa ja sen antamia tuloksia.

7.4 Malliohjelma (MATLAB)

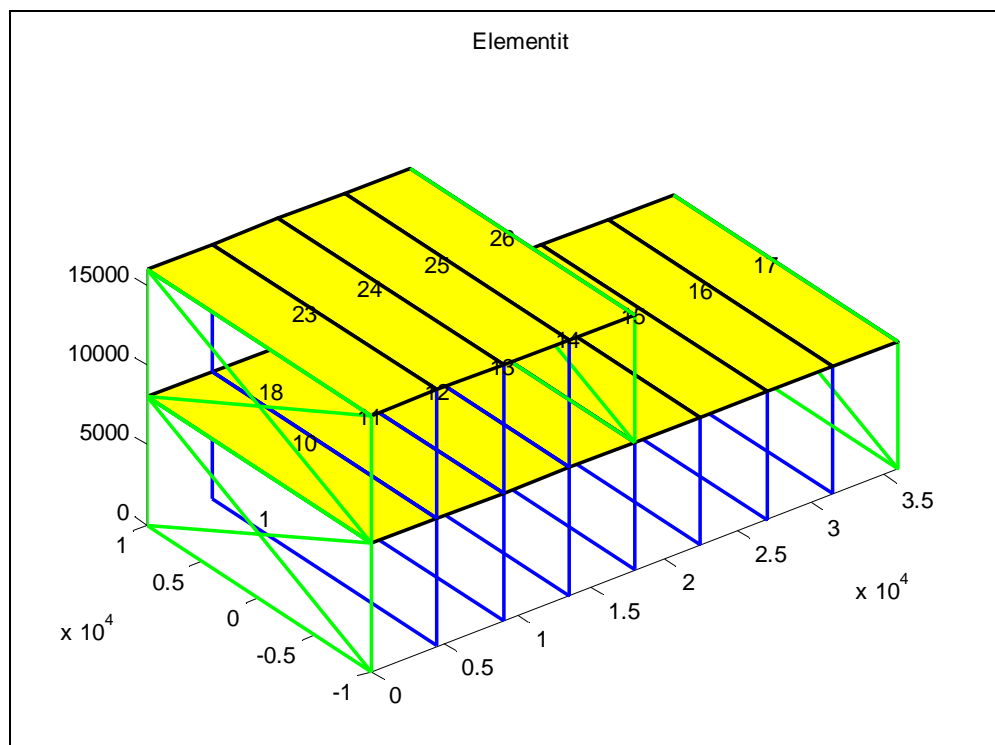
7.41 Lähtötieto-ohjelmat

Liitteessä 7A on kappaleessa 7.3 esitellyn rakennuksen lähtötieto-ohjelma. Lähtötietoihin syötetään systeemivapausasteiden lukumäärä $nsyvap$, systeemisolmujen lukumäärä $nsysol$, elementtien lukumäärä $nele$, vapausastevoimien lukumäärä $nank$, kuorma P , rakennuksen leveys $leveys$, kehäelementin taivutus- ja leikkausjäykkyyydet B_k ja S_k , levyelementin taivutus- ja leikkausjäykkyyydet B_l ja S_l ja ristikkoelementin taivutus- ja leikkausjäykkyyydet B_r ja S_r . Solmujen koordinaatit $solkoo$ voidaan merkitä joko yksitellen tai ne voidaan generoida aliohjelmalla $solgen$. Systeemisolmunumerot $nosol$ ja elementtien systeemivapausastenumerot $novap$ voidaan vastaavasti kirjoittaa yksitellen tai aliohjelmaa $elegen$ hyödyntäen. Elementtien tyypit $elty$ kirjoitetaan jonoksi lyhennysmerkinnöillä r (ristikko), k (kehä) ja l (levy). Vastaavasti elementtien suunnat $elsu$ kirjoitetaan jonoksi lyhennysmerkinnöillä p (pystyelementti) ja v (vaakaelementti). Elementtien ominaisuuksiksi $elom$ merkitään kullekin elementille sen tyypin mukainen taivutus- ja leikkausjäykkyys sekä kuormitus. Annettujen solmukuormien vapausasteet $noank$ ja kuormien arvot ank merkitään vektoreiksi.

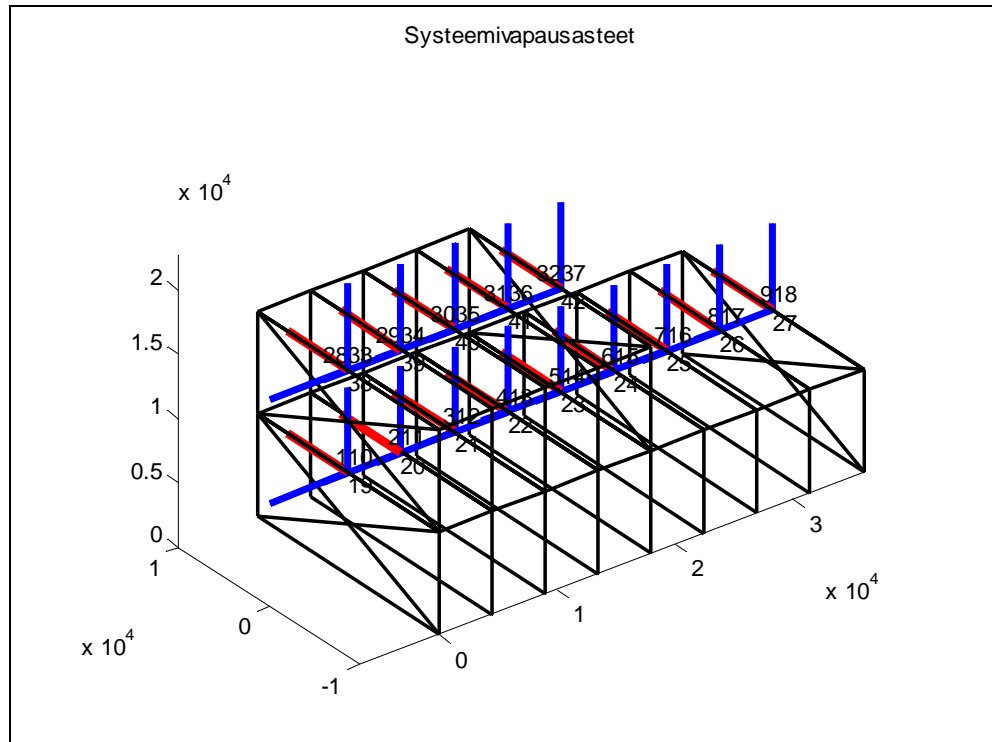
Liitteessä 7B esitellään esikäsittelyohjelma, joka piirtää lähtötieto-ohjelman perusteella kuvan käsiteltävästä tapauksesta. Kuvissa 7.8, 7.9 ja 7.10 nähdään esikäsittelyohjelmalla kuvan 7.6 rakenteesta piirretyt kuvat.



Kuva 7.8: Esikäsittelyohjelmalla piirretty kuva, solmunumerot



Kuva 7.9: Esikäsittelyohjelmalla piirretty kuva, elementtien numerot



Kuva 7.10: Esikäsittelyohjelmalla piirretty kuva, solmujen vapausasteet

7.42 Laskentaohjelma

Pääohjelma

Pääohjelma löytyy liitteestä 7C.

Funktioaliohjelmat

Funktioaliohjelmat löytyvät liitteestä 7D.

7.43 Jälkikäsittelyohjelma tulosten esittämiseksi graafisesti

Jälkikäsittelyohjelma löytyy liitteestä 7E.

8. Levyjäykistykseen laskentamenetelmien vertailu esimerkkien avulla

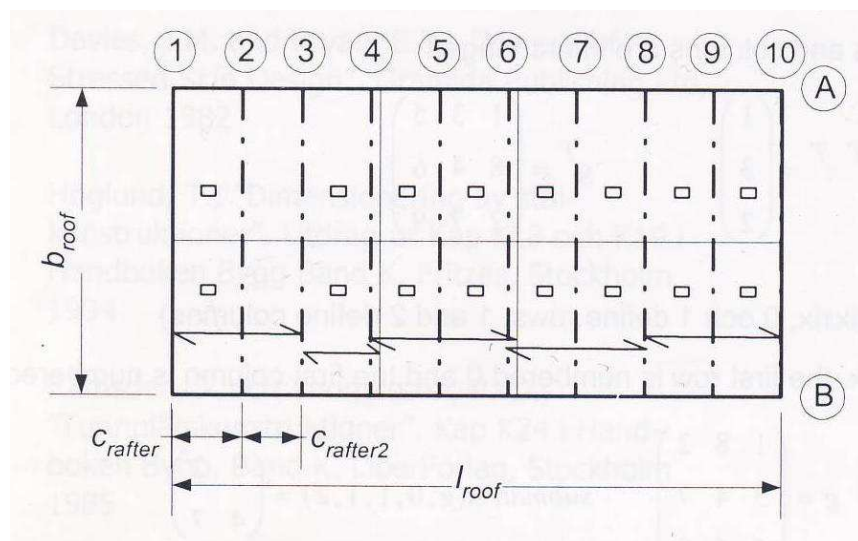
8.1 Tavoitteet

Edellisissä luvuissa on käsitelty kattorakenteen taipumien laskentamenetelmiä ja taipumaan vaikuttavia eri tekijöitä. Seuraavissa esimerkeissä verrataan esitettyjen menetelmien antamia tuloksia ja eri tekijöiden vaikutusta kattorakenteen taipumaan. Lisäksi tutkitaan, miten paljon kehien huomioiminen pienentää laskennallista taipumaa.

8.2 Esimerkit

Esimerkki 1

Tämä esimerkki on Höglundin kirjan esimerkki 1. (Höglund 2002, s. 76)



Kuva 8.1: Esimerkin 1 kuva (Höglund 2002, s. 76)

Oheisessa rakennuksessa

$n = 10$ on pilareiden lukumäärä tuulen puoleisella sivulla,

$A = 3000\text{mm}^2$ on profiilin kourun poikkileikkausala,

$br = 25000\text{mm}$ on jäykistepalkin korkeus,

$c = 0,1501$ on ohjelmalla (liite 3E ja 3F) laskettu leikkausjoustavuuskerroin kaksitukiselle palkille (ulokepalkille sama),

$E = 210kN/mm^2$ on kimmokerroin,

$x = [0 \quad 7000 \quad 12000 \quad 19000 \quad 26000 \quad 32000 \quad 38000 \quad 44000 \quad 50000 \quad 56000]mm$ ovat pilareiden sijantikoordinaatit,

$L = x(10)$ on rakennuksen pituus,

$\alpha_3 = 1$ on taivutusjäykkyuden laskemisessa tarvittava α -kerroin,

$B = \frac{EABr^2}{2 \cdot \alpha_3} [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$ on taivutusjäykkyys kullakin välillä,

$S = \frac{l}{c}$ on leikkausjäykkyys kullakin välillä,

$q = 4,97kN/m$ on Eurokoodin mukaan laskettu tuulikuorma pitkälle sivulle ja

$p = [q \cdot 3,5m \quad q \cdot 6m \quad q \cdot 6m \quad q \cdot 7m \quad q \cdot 6,5m \quad q \cdot 6m \quad q \cdot 6m \quad q \cdot 6m \quad q \cdot 6m \quad q \cdot 3m]$ ovat pistekuormat pilareille.

Oletetaan ensin, että rakennus on molemmista päistään jäykistetty, joten sitä on tarkasteltava kaksitukisena palkkina.

Yksinkertaiseen elementtimenetelmään perustuva laskentaohjelma on listattu liitteessä 4E ja sillä saadaan maksimitaipumaksi rakennuksen keskikohdassa $50,115mm$. Elementtimenetelmään perustuvalla laskentaohjelmalla (liitteet 5B, 5C ja 5D) rakennuksen keskikohdan maksimitaipumaksi saadaan vastaavasti $50,115mm$. Höglundin kirjan esimerkissä maksimitaipumalle on saatu arvo $50,29mm$.

Oletetaan seuraavaksi, että kehät ovat jäykkiä ja lasketaan rakenteen taipuma tapauksessa, jossa kehän joustavuus $s = 2.64mm$.

Luvun 6.2 likimääräiskaava (6.12) antaa tulokseksi $31,754mm$. Yksinkertaiseen elementtimenetelmään ja voimamenetelmään perustuvalla laskentaohjelmalla (liite 6A) saadaan maksimitaipumaksi rakennuksen keskikohdassa $33,048mm$.

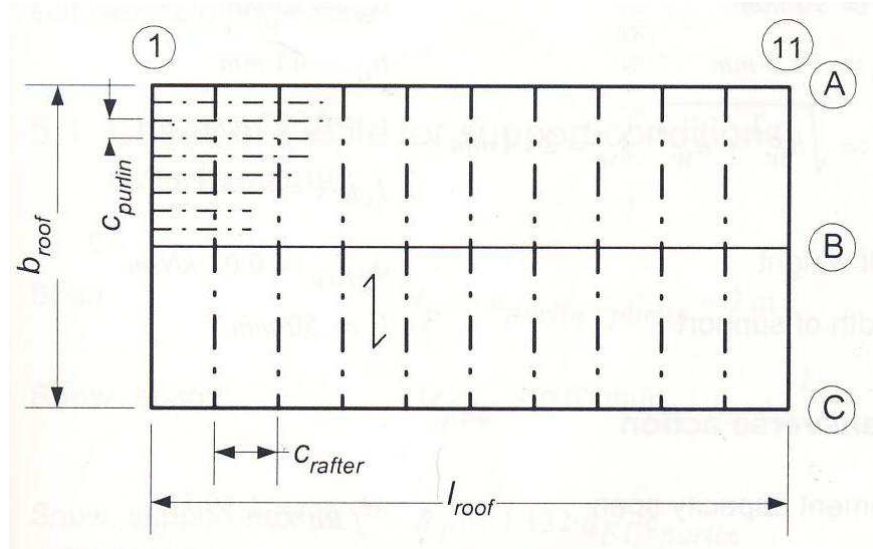
Elementtimenetelmään perustuvalla, jäykät kehät huomioivalla laskentaohjelmalla rakennuksen keskikohdan taipumaksi saadaan vastaavasti $33,048\text{mm}$. Likimääräiskaavan ero tarkempiin laskelmiin nähden aiheutunee pääasiassa siitä, että kehäjako ei ole tasavälinen, mutta alustaluku on arvioitu siten kuin kehäväli olisi 7000mm . Jäykät kehät pienentävät laskennallista maksimitaipumaa rakenteen keskellä noin 34,0 %.

Tarkastellaan vielä tapausta, jossa rakennus on molemmilta pitkiltä sivuilta ja toisesta päädyistä jäykistetty, jolloin sitä on tarkasteltava ulokepalkkina. Pitkien sivujen jäykistykset sijaitsevat pilarin 6 kohdalla.

Yksinkertaiseen elementtimenetelmään perustuvalla laskentaohjelmalla saadaan maksimitaipumaksi pilarin 10 kohdalla $198,337\text{mm}$. Elementtimenetelmään perustuvalla laskentaohjelmalla rakennuksen maksimitaipumaksi saadaan vastaavasti $198,337\text{mm}$. Kun jäykkien kehien vaikutus huomioidaan, saadaan molemmilla menetelmillä maksimitaipumaksi pilarin numero 9 kohdalla $57,092\text{mm}$ ja päädyssä $56,149\text{mm}$. Likimääräiskaavalla (6.17) saadaan taipumaksi $55,744\text{mm}$ kehävälillä 5000mm arvolla. Kehien huomioiminen pienentää tässä tapauksessa laskennallista taipumaa päädyssä jopa 71,7 %.

Esimerkki 2

Tämä esimerkki on Höglundin kirjan esimerkki 2. (Höglund 2002, s. 89)



Kuva 8.2: Esimerkin 2 kuva (Höglund 2002, s. 89)

Oheisessa rakennuksessa

$n = 11$ on pilareiden lukumäärä tuulen puoleisella sivulla,

$A = 1600 \text{ mm}^2$ on profiilin kourun poikkileikkausala,

$b_r = 18000 \text{ mm}$ on jäykistepalkin korkeus,

$c = 0,0289$ on ohjelmalla laskettu leikkausjoustavuuskerroin kaksitukiselle palkille,

$c = 0,0571$ on ohjelmalla laskettu leikkausjoustavuuskerroin ulokepalkille,

$E = 210 \text{ kN/mm}^2$ on kimmokerroin,

$x = [0 \ 7200 \ 14400 \ 21600 \ 28800 \ 36000 \ 43200 \ 50400 \ 57600 \ 64800 \ 72000] \text{ mm}$ ovat pilareiden sijantikoordinaatit,

$L = x(11)$ on rakennuksen pituus,

$\alpha_3 = 0,4939$ on taivutusjäykkyuden laskemisessa tarvittava α -kerroin,

$B = \frac{EA b_r^2}{2 \cdot \alpha_3} [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$ on taivutusjäykkyys kullakin välillä,

$S = \frac{l}{c}$ on leikkausjäykkyys kullakin välillä,

$q = 2,213 \text{ kN/m}$ on Eurokoodin mukaan laskettu tuulikuorma pitkälle sivulle ja

$$p = [q \cdot 3,6 \text{ m} \quad q \cdot 7,2 \text{ m} \quad q \cdot 7,2 \text{ m} \quad q \cdot 7,2 \text{ m} \quad q \cdot 7,2 \text{ m} \quad q \cdot 7,2 \text{ m} \quad q \cdot 7,2 \text{ m} \quad q \cdot 7,2 \text{ m} \\ q \cdot 7,2 \text{ m} \quad q \cdot 7,2 \text{ m} \quad q \cdot 3,6 \text{ m}]$$

ovat pistekuormat pilareille.

Oletetaan ensin, että rakennus on molemmista päistään jäykistetty, joten sitä on tarkasteltava kaksitukisena palkkina.

Yksinkertaiseen elementtimenetelmään perustuvalla laskentaohjelmalla saadaan maksimitaipumaksi rakennuksen keskikohdassa $12,748 \text{ mm}$. Elementtimenetelmään perustuvalla laskentaohjelmalla rakennuksen keskikohdan maksimitaipumaksi saadaan $12,748 \text{ mm}$. Höglundin kirjan esimerkissä maksimitaipumalle on saatu arvo $12,74 \text{ mm}$.

Oletetaan seuraavaksi, että kehät ovat jäykkiä ja lasketaan rakenteen taipuma tapauksessa, jossa kehän joustavuus $k = 2,64 \text{ mm}$.

Luvun 6.2 likimääräiskaava (6.12) antaa tulokseksi $10,263 \text{ mm}$. Yksinkertaiseen elementtimenetelmään ja voimamenetelmään perustuvalla laskentaohjelmalla saadaan maksimitaipumaksi rakennuksen keskikohdassa $10,210 \text{ mm}$. Elementtimenetelmään perustuvalla, jäykät kehät huomioivalla laskentaohjelmalla rakennuksen keskikohdan taipumaksi saadaan vastaavasti $10,210 \text{ mm}$. Tässä voidaan huomata, että likimääräiskaava antaa huomattavasti tarkemman tuloksen tasavälisellä kehäjaolla kuin esimerkin 1 epätasavälisellä kehäjaolla. Jäykät kehät pienentävät laskennallista maksimitaipumaa rakenteen keskellä 20,0 %.

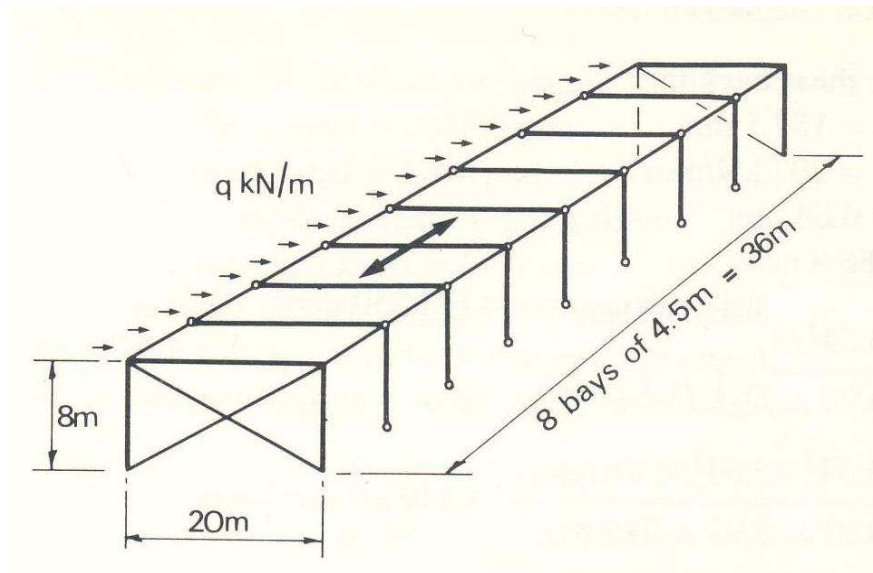
Tarkastellaan vielä tapausta, jossa rakennus on molemmilta pitkiltä sivuilta ja toisesta päädyistä jäykistetty, jolloin sitä on tarkasteltava ulokepalkkina. Pitkien sivujen jäykistykset sijaitsevat pilarin 6 kohdalla.

Yksinkertaiseen elementtimenetelmään perustuvalla laskentaohjelmalla saadaan maksimitaipumaksi pilarin 11 kohdalla $67,983 \text{ mm}$. Elementtimenetelmään perustuvalla laskentaohjelmalla rakennuksen maksimitaipumaksi saadaan vastaavasti $67,983 \text{ mm}$. Kun jäykkien kehien vaikutus huomioidaan, saadaan molemmilla menetelmillä maksimitaipumaksi päädyssä $31,312 \text{ mm}$. Likimääräiskaavalla (6.17) saadaan taipumaksi

35,965mm. Tarkemmissa laskelmissa jäykät kehät pienentävät laskennallista maksimitaipumaa rakenteen päädyssä 50,9 %.

Esimerkki 3

Tämä esimerkki on Davieksen ja Bryanin kirjan esimerkki 7.4. (Davies, J. M. ja Bryan E. R. 1982, s. 124)



Kuva 8. 3: Esimerkin 3 kuva (Davies, J. M. ja Bryan E. R. 1982, s. 124)

Oheisessa rakennuksessa

$n = 9$ on pilareiden lukumäärä tuulen puoleisella sivulla,

$A = 1000\text{mm}^2$ on profiilin kourun poikkileikkausala,

$br = 20000\text{mm}$ on jäykistepalkin korkeus,

$c = 0,0672$ on Davieksen ja Bryanin kirjasta otettu leikkausjoustavuuskerroin (ohjelmalla laskettu poikkeaa tästä jonkin verran, koska kyseisen kirjan taulukko ja ECCS:n taulukko eroavat toisistaan),

$E = 207\text{kN/mm}^2$ on kimmokerroin,

$x = [0 \quad 4500 \quad 9000 \quad 13500 \quad 18000 \quad 22500 \quad 27000 \quad 31500 \quad 36000]\text{mm}$ ovat pilareiden sijantikoordinaatit,

$L = x(9)$ on rakennuksen pituus,

$\alpha_3 = 1$ on taivutusjäykkyyden laskemisessa tarvittava α -kerroin,

$B = \frac{EAb r^2}{2 \cdot \alpha_3} [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$ on taivutusjäykkyys kullakin välillä,

$S = \frac{l}{c}$ on leikkausjäykkyys kullakin välillä,

$q = 2,45 \text{ kN/m}$ on Eurokoodin mukaan laskettu tuulikuorma pitkälle sivulle ja

$p = [q \cdot 2,25 \text{ m} \quad q \cdot 4,5 \text{ m} \quad q \cdot 4,5 \text{ m} \quad q \cdot 4,5 \text{ m} \quad q \cdot 4,5 \text{ m} \quad q \cdot 4,5 \text{ m} \quad q \cdot 4,5 \text{ m} \quad q \cdot 4,5 \text{ m} \quad q \cdot 2,25 \text{ m}]$ ovat pistekuormat pilareille.

Esimerkin laskussa on huomioitu jäykät kehät, joiden joustavuus on $k = 2.64 \text{ mm}$. Likimääräiskaava antaa maksimitaipumalle tuloksen $5,989 \text{ mm}$. Yksinkertaiseen elementtimenetelmään ja voimamenetelmään perustuvalla laskentaohjelmalla saadaan maksimitaipumaksi rakennuksen keskikohdassa $5,965 \text{ mm}$. Elementtimenetelmään perustuvalla, kehät huomioivalla laskentaohjelmalla rakennuksen keskikohdan taipumaksi saadaan vastaavasti $5,965 \text{ mm}$. Davieksen ja Bryanin käyttämässä käsinlaskentamenetelmällä kehän maksimitaipumaksi on saatu $5,9 \text{ mm}$.

Esimerkki 4

Tarkastellaan vielä esimerkkiä 2 siten, että rakennuksen molemmissa päädyissä jäykisteen kahden osakentän levyjen paksuutta kasvatetaan ja kiinnittimien määrää lisätään. Tavoitteena on tutkia, miten levypaksuus ja kiinnittimien määrä vaikuttavat taipumaan. Laskelmassa tarkastellaan rakennetta kaksitukisena palkkina.

Esimerkin 2 tapauksessa koko jäykisteen levyjen paksuus t on $0,587 \text{ mm}$. Lisätään nyt levypaksuutta päädyn osakentissä siten, että levypaksuus onkin ensin $0,636 \text{ mm}$ ja sitten $0,850 \text{ mm}$. Levyssä olevien kiinnittimien määrä n_f leveyssuunnassa oli alkuperäisessä tapauksessa 4 ja kiinnitykset oli tehty jokaisessa kourussa. Muutetaan rakennetta siten, että yksittäiset levyt ovat leveydeltään kaksinkertaisia, levyssä olevien kiinnittimien määrä on 4 ja kiinnitys on tehty joka toisen kourun kohdalta. Verrataan tätä sitten tilanteeseen, jossa päädyn osakentissä kiinnittimien määrän on 8 ja kiinnitys on tehty jokaisen kourun

kohdalta. Levypaksuuden t ja kiinnittimien määrän n_f vaikutus leikkausjoustavuuteen on esitetty taulukossa 8.1.

Taulukko 8.1: Joustavuus, kourut rakennuksen poikittaissuunnassa

t (mm)	0,587	0,636	0,85
n_f			
4	0,0504	0,0455	0,0338
8	0,0289	0,0278	0,0252

Päätyjen osakenttien levypaksuuden ja kiinnittimien määrän vaikutus rakennuksen maksimitaipumaan on esitetty taulukoissa 8.2 ja 8.3.

Taulukko 8.2: Taipumat, kehiä ei huomioitu

t (mm)	0,587	0,636	0,85	0,581→0,85
n_f				
4	17,0103	16,3856	14,8941	-12,4 %
8	14,2694	14,1292	13,7977	-3,3 %
	-16,1 %	-13,8 %	-7,4 %	-18,9 %

Taulukko 8.3: Taipumat, kehät huomioitu

t (mm)	0,587	0,636	0,85	0,581→0,85
n_f				
4	12,7451	12,4031	11,5556	-9,3 %
8	11,1872	11,1033	10,9034	-2,5 %
	-12,2 %	-10,5 %	-5,6 %	-14,5 %

Taulukon 8.2 tuloksista nähdään, että kun päätyjen osakenttien levypaksuutta lisätään 44,8%, mutta kiinnittimet ovat joka toisessa kourussa koko jäykistelevyn alueella, taipuma pienenee 12,4%. Kun sitten päädyn osakentissä kiinnittimet ovat jokaisessa kourussa, taipuma pienenee levypaksuutta lisättäessä vain 3,3%. Kehän vaikutus huomioituna tulokset ovat vastaavan suuntaisia (taulukko 8.3). Lisäksi taulukon 8.2 tuloksista nähdään, että pienimmällä levypaksuudella kiinnittimien määrän lisääminen pienentää taipumaa 16,1%, kun suurimman levypaksuuden kohdalla taipuma pienenee vain 7,4%. Kehien vaikutus huomioituna tulokset ovat edelleen vastaavan suuntaisia.

Tutkitaan sitten sitä, miten levykourujen suunta vaikuttaa jäykistelevyn taipumaan. Esimerkissä 2 ja tämän esimerkin alkuosassa oletetaan, että levykourut ovat rakennuksen poikittaissuunnassa. Kun levykourut ovat rakennuksen pitkittäissuunnassa, levypaksuuden t ja kiinnittimien määrän n_f vaikutus leikkausjoustavuuteen nähdään taulukosta 8.4.

Taulukko 8.4: Joustavuus, kourut rakennuksen pitkittäissuunnassa

t (mm)	0,587	0,636	0,85
n_f			
4	0,0801	0,0743	0,0603
8	0,0578	0,0561	0,0515

Päätyjen osakenttien levypaksuuden ja kiinnittimien määrän vaikutus rakennuksen maksimitaipumaan on esitetty taulukoissa 8.5 ja 8.6.

Taulukko 8.5: Taipumat, kehiä ei huomioitu

t (mm)	0,587	0,636	0,85	0,581→0,85
n_f				
4	30,0695	29,3301	27,5453	-8,4 %
8	27,2266	27,0099	26,4235	-2,9 %
	-9,5 %	-7,9 %	-4,1 %	-12,1 %

Taulukko 8.6: Taipumat, kehät huomioitu

t (mm)	0,587	0,636	0,85	0,581→0,85
n_f				
4	18,8905	18,6148	17,9239	-5,1 %
8	17,7965	17,7092	17,4701	-1,8 %
	-5,8 %	-4,9 %	-2,5 %	-7,5 %

Kun verrataan taulukoita 8.2 ja 8.3 taulukoihin 8.5 ja 8.6, huomataan, että jälkimmäisessä tapauksessa päätyosalevyn kiinnittimien lisäämisen ja levypaksuuden kasvattamisen vaikutus taipumaan on suhteellisesti pienempi kuin ensimmäisessä tapauksessa. Huomattavaa on myös, että ensimmäisessä tapauksessa taipumat ovat pienempiä kuin jälkimmäisessä riippumatta siitä, otetaanko kehät huomioon vai ei. Taipumien kannalta näyttää siis siltä, että levyjen asettaminen rakennuksen poikittaissuuntaan on suositeltava vaihtoehto. Kiinnittimien määrän lisääminen ja levypaksuuden kasvattaminen voi tässä tapauksessa pienentää taipumia jopa 18,9%.

Tutkitaan vielä tilannetta, jossa kiinnittimiä lisätään ja levypaksuutta kasvatetaan koko jäykistelevyn alueella. Kun levyt ovat poikittain, maksimitaipumat on merkitty taulukoihin 8.7 ja 8.8.

Taulukko 8.7: Taipumat, kehiä ei huomioitu

t (mm)	0,587	0,636	0,85	0,581→0,85
n _f				
4	17,0103	16,0342	13,7037	-19,4 %
8	12,7277	12,5085	11,9906	-5,8 %
	-25,2 %	-22,0 %	-12,5 %	-29,5 %

Taulukko 8.8: Taipumat, kehät huomioitu

t (mm)	0,587	0,636	0,85	0,581→0,85
n _f				
4	12,7451	12,1942	10,8089	-15,2 %
8	10,1974	10,0575	9,7227	-4,7 %
	-20,0 %	-17,5 %	-10,0 %	-23,7 %

Kun levyt ovat pitkittäin, maksimitaipumat on merkitty taulukoihin 8.9 ja 8.10.

Taulukko 8.9: Taipumat, kehiä ei huomioitu

t (mm)	0,587	0,636	0,85	0,581→0,85
n _f				
4	30,0695	28,9142	26,1255	-13,1 %
8	25,6275	25,2889	24,3726	-4,9 %
	-14,8 %	-12,5 %	-6,7 %	-18,9 %

Taulukko 8.10: Taipumat, kehät huomioitu

t (mm)	0,587	0,636	0,85	0,581→0,85
n _f				
4	18,8905	18,4379	17,2863	-8,5 %
8	17,0713	16,9234	16,5162	-3,3 %
	-9,6 %	-8,2 %	-4,5 %	-12,6 %

Kerätään seuraavaksi taulukoiden 8.1-8.10 tulokset taulukkoon 8.11.

Taulukko 8.11: Taipumien yhteenveto

Joustavuus	Kiinnittimien lisäys ja levypaksuuden kasvatus			
	päätykentissä, levyt poikittain, kehiä ei huomioitu.	koko jäykisteessä, levyt poikittain, kehiä ei huomioitu.	päätykentissä, levyt poikittain, kehät huomioitu.	koko jäykisteessä, levyt poikittain, kehät huomioitu.
0,0504	17,0103	17,0103	12,7451	12,7451
0,0455	16,3856	16,0342	12,4031	12,1942
0,0338	14,8941	13,7037	11,5556	10,8089
0,0289	14,2694	12,7277	11,1872	10,1974
0,0278	14,1292	12,5085	11,1033	10,0575
0,0252	13,7977	11,9906	10,9034	9,7227
Vähennys maksimista	3,2126	5,0197	1,8417	3,0224

Taipuma [mm]	Kiinnittimien lisäys ja levypaksuuden kasvatus			
	päätykentissä, levyt pitkittäin, kehiä ei huomioitu.	koko jäykisteessä, levyt pitkittäin, kehiä ei huomioitu.	päätykentissä, levyt pitkittäin, kehät huomioitu.	koko jäykisteessä, levyt pitkittäin, kehät huomioitu.
0,0801	30,0695	30,0695	18,8905	18,8905
0,0743	29,3301	28,9142	18,6148	18,4379
0,0603	27,5453	26,1255	17,9239	17,2863
0,0578	27,2266	25,6275	17,7965	17,0713
0,0561	27,0099	25,2889	17,7092	16,9234
0,0515	26,4235	24,3726	17,4701	16,5162
Vähennys maksimista	3,646	5,6969	1,4204	2,3743

Taulukon 8.11 rinnakkaisiin sarakkeisiin on merkitty vastaavat taipumat tapauksissa, joissa kiinnittimiä on lisätty ja levypaksuutta kasvatettu ensin vain kahdessa päädyn osakentässä molemmissa päissä ja sitten koko jäykistelevyn alueella. Vähennys maksimista kertoo yksittäisen sarakkeen ensimmäisen ja viimeisen arvon erotuksen.

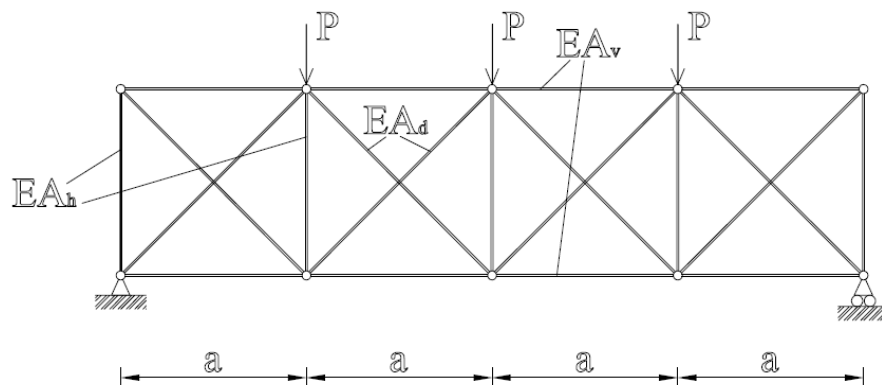
Tarkastellaan esimerkkinä tapausta, jossa levyt ovat poikittain eikä kehiä ole huomioitu. Päätyjen osakenttien tapauksessa levypaksuuden kasvattaminen arvosta 0,587mm arvoon 0,850mm pienentää taipumaa arvosta 17,0103mm arvoon 14,8941mm (taulukko 8.2). Kiinnittimien määrän tuplaaminen päädyn osakentissä levypaksuutta kasvattamatta pienentää taipumaa arvosta 17,0103mm arvoon 14,2694mm. Molempien yhteisvaikutuksesta taipuma pienenee arvoon 13,7977mm, jolloin kokonaistaipuma pienenee 3,2126mm. Kun muutoksia tehdään koko levyjäykisteen alueella, kokonaistaipuma pienenee 5,0197mm, jolloin koko jäykistelevyn vahvistaminen pienentää kokonaistaipumaa vain 1,8071mm verrattuna pelkkien päätyjen osakenttien vahvistamiseen.

Saaduista tuloksista huomataan siis, että kiinnittimien lisääminen ja levypaksuuden kasvattaminen koko jäykistelevyn alueella pienentää taipumaa hyvin vähän verrattuna siihen, että kiinnittimiä olisi lisätty ja levypaksuutta kasvatettu vain molempien päätyjen kahdessa osakentässä. Siten taipumaan nähden tulee useimmiten taloudellisimmaksi vaihtoehdoksi lisätä kiinnittimiä ja kasvattaa levypaksuutta ainoastaan rakenteen päätyjen osakentissä, missä leikkausvoimakin on suurin.

Esimerkki 5

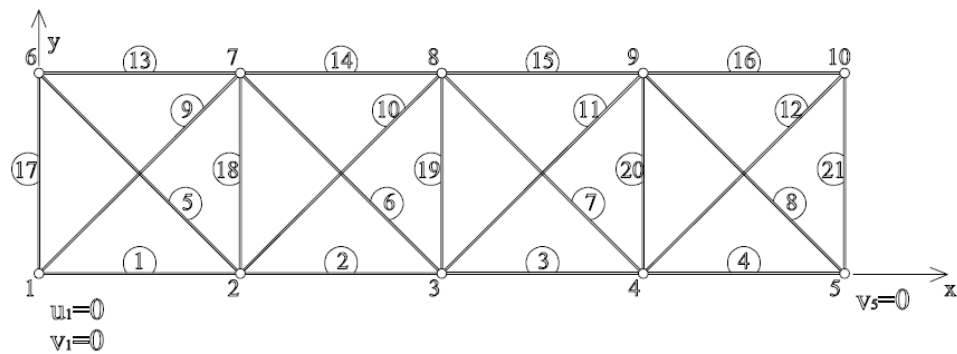
Luvussa 7. esiteltiin ristikko- ja kehäelementit, joita voidaan käyttää useampikerroksisten rakennusten jäykistyssysteemin mallintamisessa. Verrataan seuraavaksi näiden elementtien antamia tuloksia yksinkertaisissa tapauksissa.

Otetaan ristikkotapauksen esimerkiksi kuvassa 8.4 oleva ristikkopalkki.

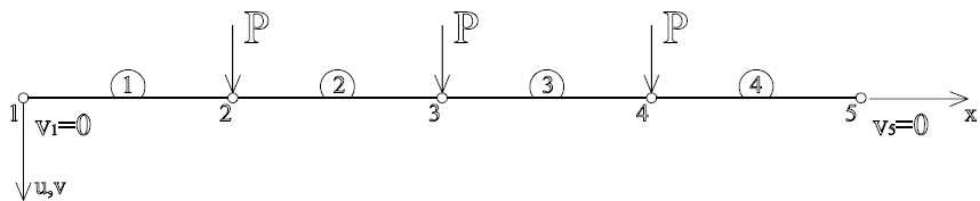


Kuva 8.4: Ristikkopalkki

Lasketaan rakenteen taipumat ristikko-ohjelmalla ja ristikkoelementtiohjelmalla. Tutkitaan, miten diagonaalisauvojen poikkipinta-alan A_d muuttaminen vaikuttaa taipumaan.



Kuva 8.5: Elementtiverkko ristikko-ohjelmalle



Kuva 8.6: Elementtiverkko ristikkojäykiste-elementtiohjelmalle

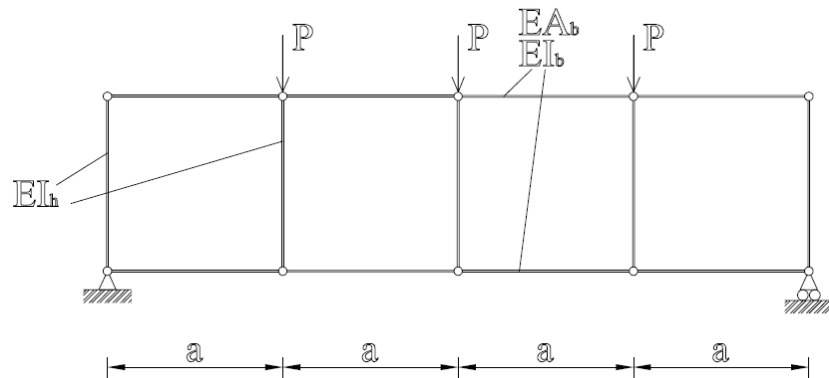
Ristikkopalkin elementti- ja solmunumerointi ristikko-ohjelmalle on esitetty kuvassa 8.5 ja elementtiverkko ristikkojäykiste-elementtiohjelmalle kuvassa 8.6. Taulukossa 8.12 on esitetty eri ohjelmilla laskettu palkin keskipisteen taipuma.

Taulukko 8.12: Ristikko-ohjelman ja ristikkojäykisteohjelman tulokset

A_d/A_b	ris (ala)	ris (ylä)	ris (ka)	ris-pal
1	8,9755	9,3105	9,1430	9,1618
0,1	34,4150	34,8832	34,6491	34,6176
0,01	288,9684	289,4649	289,2167	289,1760
0,001	2834,6000	2835,1000	2834,8500	2834,8000

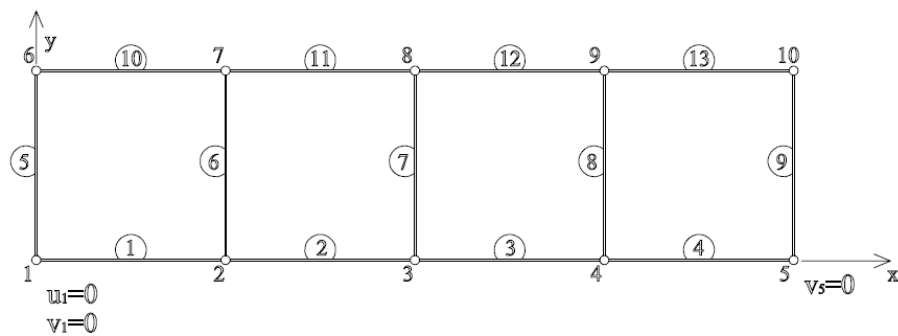
Ristikko-ohjelma antaa taipuman tulokset sekä ristikon ylä- että alapaarteessa (taulukossa 8.12 sarakkeet *ris(ala)* ja *ris(ylä)*). Näistä on otettu keskiarvo (sarake *ris(ka)*) ja verrattu sitä ristikkojäykiste-elementtiohjelmalla saatuun taipumaan (sarake *ris – pal*). Tuloksista nähdään, että ristikkoelementin käyttäminen elementtiohjelmassa antaa ristikko-ohjelmaan verrattuna hyvin tarkkoja tuloksia.

Otetaan kehätapauksen esimerkiksi kuvassa 8.7 oleva kehäpalkki.

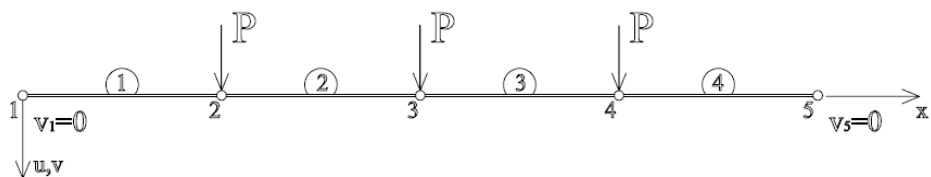


Kuva 8.7: Kehäpalkki

Lasketaan rakenteen taipumat kehäohjelmalla ja kehäelementtiohjelmalla. Tutkitaan, miten horisontaalisauvojen poikkipinta-alan A_b muuttaminen vaikuttaa taipumaan.



Kuva 8.8: Elementtiverkko kehäohjelmalle



Kuva 8.9: Elementtiverkko kehäjäykiste-elementtiohjelmalle

Kehäpalkin elementti- ja solmunumerointi kehäohjelmalle on esitetty kuvassa 8.8 ja elementtiverkko kehäjäykiste-elementtiohjelmalle kuvassa 8.9. Taulukossa 8.13 on esitetty eri ohjelmilla laskettu palkin keskipisteen taipuma.

Taulukko 8.13: Kehäohjelman ja kehäjäykisteohjelman tulokset

A_b/la^2	keh (ala)	keh (ylä)	keh (ka)	keh-pal
1000	0,1909	0,1914	0,1912	0,1938
10000	0,1861	0,1862	0,1862	0,1881

Kehäohjelma antaa ristikko-ohjelman tavoin taipuman tulokset sekä kehän ylä- että alapaarteessa (taulukossa 7.13 sarakkeet *keh(ala)* ja *keh(ylä)*). Näistä on otettu keskiarvo (sarake *keh(ka)*) ja verrattu sitä kehäjäykiste-elementtiohjelmalla saatuun taipumaan (sarake *keh – pal*). Taulukosta nähdään, että elementtiohjelmalla saatujen tulosten tarkkuus kehäohjelman tuloksiin verrattuna paranee, kun paarteiden pinta-alaa kasvatetaan.

8.3 Johtopäätökset

Esimerkkien 1, 2 ja 3 pohjalta voidaan havaita, että kaksitukisen palkin tapauksessa yksinkertaiseen elementtimenetelmään perustuva algoritmi ja varsinainen elementtimenetelmä antavat toisiinsa verrattuna yhteneviä tuloksia, jotka ovat hyvin lähellä kirjan esimerkeissä annettuja ratkaisuja. Tulokset ovat samansuuntaisia riippumatta siitä, otetaanko kehät huomioon vai ei. Vastaavia päätelmiä ei voida ulokepalkin tapauksessa tehdä, sillä käsitellystä aineistosta ei löytynyt esimerkkiä, johon tuloksia olisi voitu verrata. Voidaan kuitenkin todeta, että tässäkin tapauksessa yksinkertainen elementtimenetelmä ja varsinainen elementtimenetelmä antoivat toisiinsa verrattuna yhteneviä tuloksia, jotka ovat suuruudeltaan realistisia.

Käsitellyissä esimerkeissä kehien vaikutusta arvioivan likimääräiskaavan antamat tulokset eroavat tapauksesta riippuen jonkin verran tai jopa merkittävästi muiden menetelmien antamista tuloksista. Tämä johtunee ensisijaisesti siitä, että likimääräiskaavassa on hankala huomioida epätasavälistä pilarijakoa. Lisäksi ulokepalkin likimääräiskaava olettaa tukimomentin palkin päätyyn, vaikka tapauksesta riippuen se voi sijaita missä tahansa jänteen kohdalla.

Esimerkin 4 tuloksista voidaan huomata, että mikäli jäykistepalkin taipumaa halutaan pienentää, on perusteltua tehdä se lisäämällä kiinnittimiä ja kasvattamalla levypaksuutta vain päätykentissä. Kiinnittimien lisääminen ja levypaksuuden kasvattaminen koko jäykistelevyn alueella pienentää edelliseen verrattuna taipumaa vain hieman enemmän.

Lisäksi taipumaan voidaan vaikuttaa levyjen suuntauksella. Asettamalla levyt rakennuksen pitkittäissuuntaan saadaan suurempia taipumia kuin levyjen ollessa poikittaissuunnassa. Esitettyjen taulukoiden perusteella näyttäisi siltä, että kiinnittimien lisääminen pienentää taipumaa enemmän kuin levypaksuuden kasvattaminen. Käytännössä arviot on kuitenkin tehtävä kunkin kohteen kohdalla erikseen, sillä tulokset riippuvat saatavilla olevien profiilipeltien paksuudesta. Lisäksi taipuman pienentämiseen tässä esitetyillä keinoilla liittyy taloudellisia tekijöitä kuten työkustannukset ja materiaalihinnat, jotka voivat vaikuttaa käytetyn menetelmän valintaan.

Esimerkistä 5 nähdään, että esiteltyjen ristikko- ja kehäelementtien käyttämisellä voidaan saada hyvin tarkkoja likiratkaisuja yksinkertaisissa tapauksissa. Monimutkaisempien rakennusten tapauksessa käytetyt elementit ja menetelmä vaativat vielä jatkokehittelyä ja testaamista tulosten luotettavuuden varmistamiseksi.

9. Loppupäätelmät

Tämän diplomityön tavoitteena oli tutkia levyjäykistetyin katon vaikutusta rakenteen taipumaan ja kehittää laskentaan kaavat, jotka voidaan ohjelmoida Rautaruukki Oyj:n ohjelmaan. Tutkittavaa rakennetta käsiteltiin Timoshenko –palkkiteorian avulla, joka ottaa huomioon sekä taivutuksen että leikkauksen vaikutuksen rakenteen taipumaan. Rakenteen taivutus- ja leikkausjäykkyys määritettiin eurooppalaisten suositusten mukaisesti, jotka perustuvat J. M. Davieksen ja E. R. Bryanin tutkimuksiin.

Tarkasteluissa otettiin huomioon erilaiset palkin tuenta- ja kuormitustapaukset. Tuentatapauksista käsiteltiin ulokepalkki ja kaksitukinen palkki. Kuormitustapauksista käsiteltiin tasan jakautunut kuorma, tasaväliset pistekuormat ja epätasaväliset pistekuormat. Taipuman määrittämiseksi laadittiin ensin yksinkertainen laskenta-algoritmi, jota testattiin MATLAB –ympäristössä. Lisäksi laadittiin elementtimenetelmään perustuva MATLAB –ohjelma, jolla voidaan tarkastella myös staattisesti määräämättömiä rakenteita. Molempia menetelmiä kehitettiin siten, että niillä voidaan ottaa huomioon kehien vaikutus rakenteen taipumaan. Lisäksi johdettiin kimmoisalla alustalla olevan palkin teoriaan perustuvat likimääräiskaavat, joilla voidaan arvioida kehien vaikutusta rakenteen taipumaan. Lopuksi tutkittiin mahdollisuutta kehittää elementtimenetelmää siten, että sillä voidaan analysoida useampikerroksista rakennetta.

Lähteistä poimittujen esimerkkien avulla voitiin testata kehitettyjä taipuman laskentamenetelmiä. Saadut tulokset olivat kaksitukisen palkin tapauksessa lähteiden tuloksiin verrattuna lähes yhteneviä, joten näiden osalta voitiin varmistua kehitettyjen menetelmien toimivuudesta. Ulokepalkin tapauksessa tuloksia ei voitu verrata mihinkään, sillä lähteistä ei löytynyt esimerkkejä vastaavista tapauksista. Ohjelmilla saadut taipumat olivat kuitenkin varsin realistisia. Molemmissa tapauksissa yksinkertaisella elementtimenetelmällä ja varsinaisella elementtimenetelmällä saadut tulokset olivat toisiinsa nähden identtisiä. Laskelmissa vertailtiin myös kehien vaikutusta taipumaan ja havaittiin, että kehien vaikutuksen huomioiminen voi pienentää laskennallista taipumaa huomattavasti. Lisäksi tutkittiin päädyn osakenttien kiinnittimien lisäämisen ja levypaksuuden kasvattamisen vaikutusta rakenteen taipumaan ja verrattiin sitä tilanteeseen,

jossa vastaavat toimenpiteet suoritetaan koko rakenteen alueella. Havaittiin, että taipuman pienenemiseen nähden on usein perusteltua lisätä kiinnittimiä ja kasvattaa levypaksuutta vain päätykentissä. Lisäksi huomattiin, että levykourujen suunnalla voi olla merkittävä vaikutus rakenteen laskennalliseen taipumaan.

Laskentamenetelmien sovelluksissa on syytä ottaa huomioon joitakin rajoittavia tekijöitä. Ensinnäkin laskelmissa on käsitelty rakennetta vain kimmoteorian näkökulmasta, jolloin plastinen analyysi on jätetty kokonaan huomiotta. Toiseksi kaikki menetelmät eivät sovellu staattisesti määräämättömien rakenteiden analysointiin. Luvussa 3 esitettyjen joustavuuskaavojen yhteydessä esiintyvälle kertoimelle K on lähteissä taulukoitu arvoja, jotka koskevat vain tietyn kokoisia profiileita. Työn yhteydessä laadituissa ohjelmissa osa taulukkoarvoista on merkitty nolliksi ohjelmallisista syistä. Tämä tulisi ottaa valmiissa ohjelmassa huomioon siten, että käyttäjä ei voi valita sellaista profiilia, jolle taulukossa ei löydy arvoja. Lisäksi tarkasteluissa ei ole huomioitu reikien vaikutusta jäykistelevyjen taipumaan. Menetelmät soveltuvat vain tasakattoisille rakenteille, joten harjakattoisissa tapauksissa on käytettävä muita laskentatapoja.

Tämän diplomityön yhteydessä ei käsitelty mahdollisten jäykistelevyissä olevien reikien eikä harjakaton vaikutusta rakenteen taipumaan. Eurooppalaisissa suosituksissa (ECCS 1995) annetaan näiden laskemiseksi ohjeita, mutta perusteellisten tulosten saamiseksi olisi hyvä suorittaa lisätutkimusta. Luvussa 7 esitetty elementtimenetelmän laajennus useampikerroksiselle rakennukselle vaatisi vastaavasti hieman jatkokehittelyä.

LÄHTEET

Zenkert, D., 1997. An Introduction to Sandwich Construction. ISBN 0-947817-77-8.

Aalto, J., 2008. Rakenteiden mekaniikan perusteet, luentomoniste.

Davies, J. M. and Bryan, E. R., Manual of Stressed Skin Diaphragm Design. Granada Publishing LTD, London 1982. ISBN 0-246-11484-3.

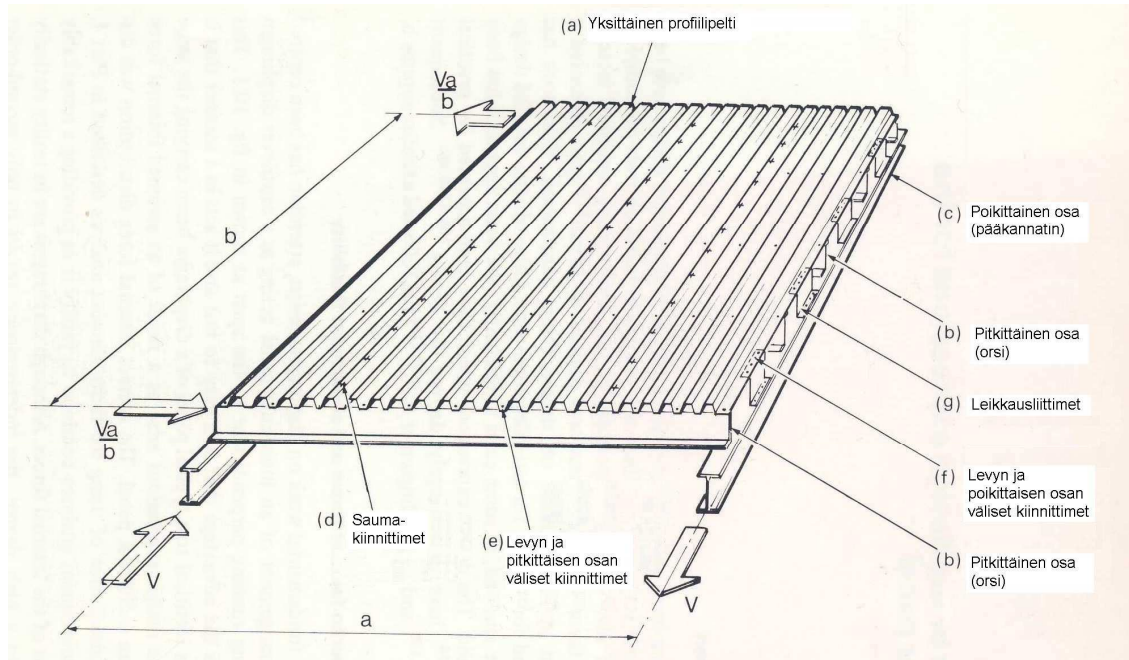
Davies, J. M. and Lawson, R. M., The Shear Deformation of Profiled Metal Sheeting, International Journal For Numerical Methods In Engineering, 12 (1978) 1507-41.

European Convention for Constructional Steelwork, European Recommendations for the Application of Metal Sheeting acting as a Diaphragm. First Edition. ECCS, Brussel 1995. ISBN 92-9147-000-9.

Bryan, E. R., The Stressed Skin Design of Steel Buildings. Granada Publishing LTD, Crosby Lockwood Staples, London 1972. ISBN 0-258-96858-3.

Höglund, T., Stabilisation by stressed skin diaphragm action. AB C O Ekblad & Co., Västermik 2002. ISBN 91-7127-032-9

Liite 3A: Leikkausjoustavuustermien johtaminen



Kuva 1: Jäykistelevykentän osat (Davies, J. M. ja Bryan, E. R. 1982, s. 208)

Profiilin vääristymästä aiheutuva joustavuus $c_{1.1}$

Davies ja Lawson ovat johtaneet energia-analyysiin perustuen profiilin vääristymästä aiheutuvan joustavuuden (Davies, J. M. ja Lawson, R. M. 1978). Se on

$$c_{1.1} = \frac{ad^{2.5}\bar{K}}{Et^{2.5}b^2} \quad (1)$$

missä a on jäykistelevyn sivumitta kohtisuorassa poimutuksen suuntaa vastaan (mm), b on jäykistelevyn sivumitta poimutuksen suunnassa (mm), d on poimujako (mm), E on kimmokerroin (kN/mm²), t on profiilin nettopaksuus (mm) ja \bar{K} on profiilista riippuva vakio.

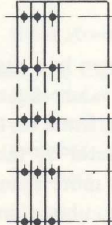
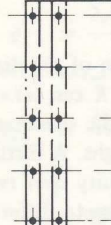
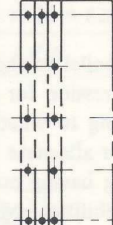
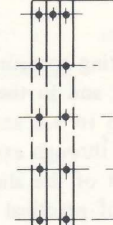
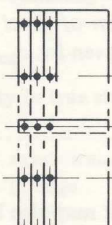
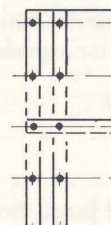
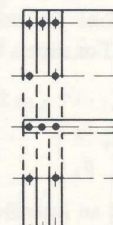
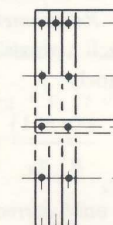
Orsien ja poimulevyjen huomioon ottamiseksi kaava (1) muuttuu muotoon (ECCS 1995, s. R.30 ja R.44)

$$c_{1.1} = \frac{ad^{2.5}\alpha_1\alpha_4K}{Et^{2.5}b^2}, \quad (2)$$

missä α_1 on kokeellisesti määritetty, välitorret huomioiva kerroin (Liite 3C) ja α_4 on poimulevyjen määrästä aiheutuva kerroin.

Arvot kertoimelle α_4 määräytyvät kiinnitystapauksen mukaan (Taulukko 1).

Taulukko 1: Kertoimet α_1 ja α_4 eri tapausten mukaan (Davies, J. M. ja Bryan, E. R. 1982, s. 174)

	fastener positions			
	every corrugation	alternate corrugations	every corrugation at both sheet ends	every corrugation at one sheet end
one sheet length for full depth	 $\bar{K} = \bar{K}_1$ α_1 from table 9.3 $\alpha_4 = 1$ (1)	 $\bar{K} = \bar{K}_2$ α_1 from table 9.3 $\alpha_4 = 1$ (2)	 $\bar{K} = \bar{K}_1$ $\alpha_1 = 1$ $\alpha_4 = 1$ (3)	 $\bar{K} = \bar{K}_2$ $\alpha_1 = 0.5$ $\alpha_4 = 1$ (4)
n_b sheet lengths in depth of panel	 $\bar{K} = \bar{K}_1$ α_1 from table 9.3 for number of purlins per sheet length $\alpha_4 = (1 + 0.3n_b)$ (5)	 $\bar{K} = \bar{K}_2$ α_1 from table 9.3 for number of purlins per sheet length $\alpha_4 = (1 + 0.3n_b)$ (6)	 $\bar{K} = \bar{K}_2$ $\alpha_1 = 1$ $\alpha_4 = (1 + 0.3n_b)$ (7)	 $\bar{K} = \bar{K}_2$ α_1 from table 9.3 for number of purlins per sheet length $\alpha_4 = (1 + 0.3n_b)(1 - \frac{1}{n_b})$ (8)

Taulukossa 1 on α_4 :lle tapausten 5, 6 ja 7 kohdalla käytetty kaava

$$\alpha_4 = 1 + 0,3 \cdot n_b. \quad (3)$$

Vaikka taulukon 1 tapauksessa 8 on otettu huomioon myös α_4 :ää pienentävä tekijä, laskentaohjelman yksinkertaistamisen kannalta on järkevää käyttää α_4 :lle kaavaa (3) aina,

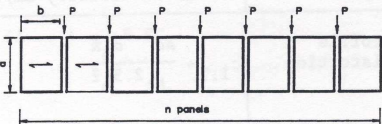
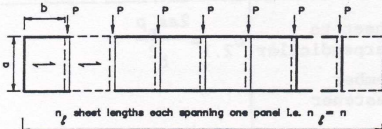
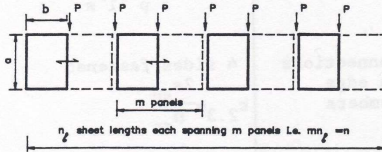
kun profiililevyjä on korkeussuunnassa enemmän kuin yksi. Näin menetellen ohjelman antamat tulokset ovat varmalla puolella.

Levyliimitysten huomioon ottamiseksi kaksitukisen palkin tapauksessa, jossa levykourut ovat rakenteen pitkittäissuunnassa, kaava muuttuu muotoon (ECCS 1995, s. R.44)

$$c_{1.1} = \frac{ad^{2.5}\alpha_5 K}{Et^{2.5}b^2}, \quad (4)$$

missä α_5 on levyliimityksistä aiheutuva kerroin (Taulukko 2 ja 3).

Taulukko 2: Kertoimen α_5 määrittäminen (ECCS 1995, s. C.45)

Table 5.10 Influence of sheet length for sheeting spanning parallel to length of diaphragm	
Design case and effect on expression for $c_{1.1}$	
Separate sheet length per panel (1)	 <p style="text-align: center;">$\alpha_5 = 1$</p>
Overlapping separate sheets (2)	 <p style="text-align: center;">α_5 is given by table 5.11</p>
Overlapping continuous sheets (3)	 <p style="text-align: center;">α_5 is given by values in table 5.11 divided by m</p>

Taulukko 3: Kerroin α_5 (ECCS 1995, s. C.45)

Table 5.11 Factor α_5 to allow for sheet continuity	
Number of sheet lengths n_l	α_5
2	1.0
3	0.9
4	0.8
5 or more	0.7

Daviesin ja Bryanin mukaan (Davies, J. M. ja Bryan, E. R. 1982, s. 174-175) kertoimelle α_5 ei ole kaikissa tapauksissa helppoa määrittää arvoa, sillä siihen vaikuttavat useat tekijät kuten se, kuinka monta levykenttää profiilipelti ylittää tai miten pellit on kiinnitetty pääkannattajien kohdalta. Laadituissa MATLAB –ohjelmissa kertoimelle α_5 käytetään taulukon 3 arvoja kaikissa tapauksissa. Taulukon 2 tapaukset voitaisiin kuitenkin huomioida ohjelmassa antamalla käyttäjän valita profiilin pääkannattajakiinnityksen tapa ja profiilipeltien ylittämien kenttien lukumäärä.

Levyn leikkausmuodonmuutoksista aiheutuva joustavuus $c_{1,2}$

Bryan on johtanut leikkausmuodonmuutoksesta aiheutuvan joustavuuden (Bryan, E. R. 1972, s. 111-112). Puhtaassa leikkauksessa kouruihin syntyy leikkausliukuma γ , joka on

$$\gamma = \frac{Q}{Gbt}, \quad (5)$$

missä Q on leikkausvoima (kN), G on liukukerroin (kN/mm²), b on jäykistelevyn sivumitta poimutuksen suunnassa (mm) ja t on profiilin nettopaksuus (mm).

Leikkauksesta aiheutuva siirtymä δ yhden kourujakson matkalta $(d + 2h)$ on siten

$$\delta = (d + 2h)\gamma, \quad (6)$$

missä d on poimujako (mm) ja h on profiilin korkeus (mm).

Yhtälöistä (5) ja (6) saadaan siirtymäksi

$$\delta = \frac{(d + 2h)Q}{Gbt} = \frac{2(1 + \nu)(d + 2h)Q}{Ebt}, \quad (7)$$

joten koko levyn matkalle a joustavuustermi $c_{1,2}$ on

$$c_{1,2} = \frac{a\delta}{Qd} = \frac{2a(1 + \nu)(1 + 2h/d)}{Ebt}. \quad (8)$$

Mahdollisten orsien huomioon ottamiseksi kaksitukisen palkin tapauksessa (ECCS 1995, s. R.30) kaava (8) saa muodon

$$c_{1,2} = \frac{2a\alpha_2(1 + \nu)(1 + 2h/d)}{Ebt}, \quad (9)$$

missä α_2 on orsien määrän huomioiva korjauskerroin. Parittomalle orsimäärälle α_2 saadaan kaavalla (ECCS 1995, Annex C.2)

$$\alpha_2 = \frac{1}{1 + \sum_i^{(n_p-1)/2} \left(1 - \frac{2i}{n_p - 1}\right)} \quad (10)$$

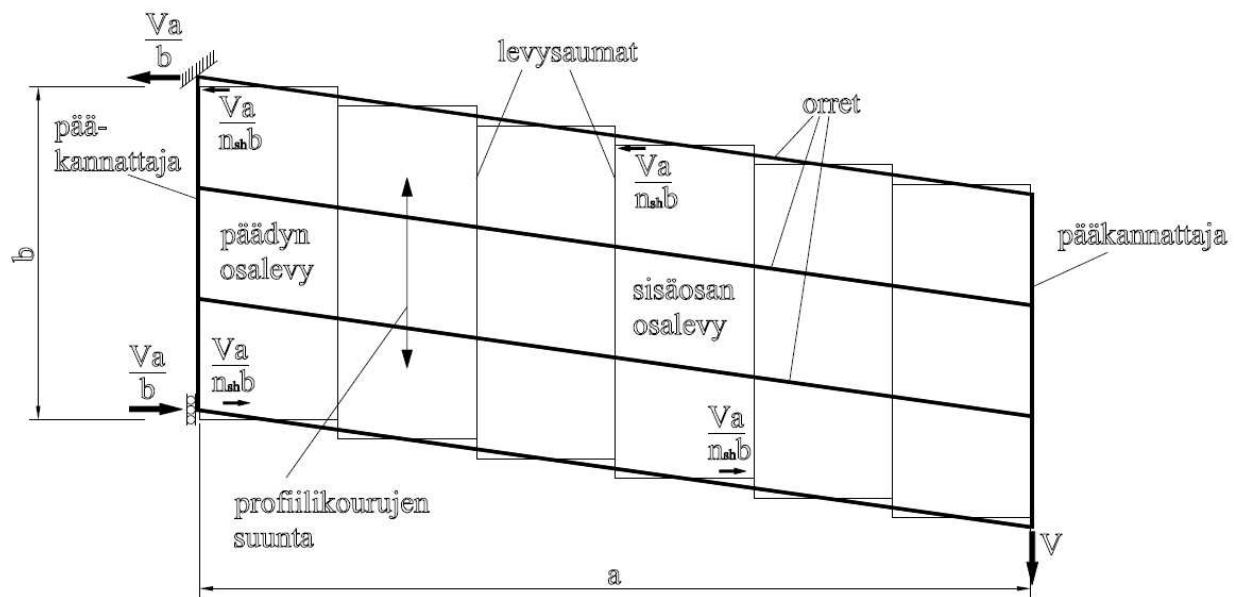
ja parilliselle orsimäärälle kaavalla

$$\alpha_3 = \frac{1}{1 + \sum_1^{(n_p-2)/2} \left(1 - \frac{2i}{n_p - 1}\right)}, \quad (11)$$

missä n_p on orsien lukumäärä.

Levyn ja orren liitoksen liukumasta aiheutuva joustavuus $c_{2,1}$

Otetaan tarkastelun kohteeksi kuvassa 2 esitetty yksinkertainen kantava levyjäykiste.



Kuva 2: Levyjäykiste

Osalevyille jakautunut kokonaisleikkausvoima Q on

$$Q = \frac{Va}{b}, \quad (12)$$

missä V on jäykistelevyn leikkausvoima (kN), a on jäykistelevyn sivumitta kohtisuorassa poimutuksen suuntaa vastaan (mm), b on jäykistelevyn sivumitta poimutuksen suunnassa (mm).

Osalevyä kohden laskettu leikkausvoima Q_{sh} reunassa on

$$Q_{sh} = \frac{Va}{n_{sh}b}, \quad (13)$$

missä n_{sh} on osalevyjen leveyksien lukumäärä jäykistekenttää kohti.

Koska uloimmille levy-orsikiinnittimille tulee vain puolet sisäkiinnittimien leikkausvoimasta, yhtä sisäkiinnitintä kohden laskettu leikkausvoima on

$$\frac{Q_{sh}}{(n_f - 1)} = \frac{Va}{n_{sh}b(n_f - 1)}, \quad (14)$$

missä n_f on levyn ja orren välisten kiinnittimien lukumäärä orrien suunnassa.

Suhteellinen vaakasiirtymä v_h levyn ja orren välillä on

$$v_h = \frac{Q_{sh}s_p}{(n_f - 1)} = \frac{Vas_p}{n_{sh}b(n_f - 1)} \quad (15)$$

missä s_p on levy-orsikiinnittimen jousto (mm/kN).

Vaakasiirtymä v_h ja suhteellinen pystysiirtymä v_v levysaumassa levyn kokonaiskiertymän φ avulla lausuttuina ovat

$$v_h = \frac{b}{2}\varphi \quad (16)$$

$$v_v = \frac{1}{n_{sh}}a\varphi. \quad (17)$$

Yhtälöistä (15)-(17) seuraa nyt pystysiirtymälle v_v

$$v_v = \frac{2a}{n_{sh}b} \frac{Vas_p}{n_{sh}b(n_f - 1)}. \quad (18)$$

Kun summataan pystysiirtymä kaikkien osalevyjen yli ja otetaan huomioon, että $a/(n_f - 1)n_{sh}$ on levyn ja orren kiinnittimien keskinäinen väli p , saadaan ensin

$$v_{kok} = \frac{2aVps_p}{b^2}, \quad (19)$$

ja tästä levyn ja orren kiinnityksestä aiheutuvaksi joustoksi

$$c_{2.1} = \frac{2aps_p}{b^2}. \quad (20)$$

Mahdollisten orsien huomioon ottamiseksi kaksitukisen palkin tapauksessa kaava saa muodon (ECCS 1995, s. R.30)

$$c_{2.1} = \frac{2aps_p\alpha_3}{b^2}, \quad (21)$$

missä α_3 on orsien määrän huomioon ottava kerroin (ECCS 1995, s. Annex C.2).

Parittomalle orsimäärälle α_3 saadaan kaavalla

$$\alpha_3 = \frac{1}{1 + \sum_1^{(n_p-1)/2} \left(1 - \frac{2i}{n_p-1}\right)^2}, \quad (22)$$

ja parilliselle orsimäärälle kaavalla

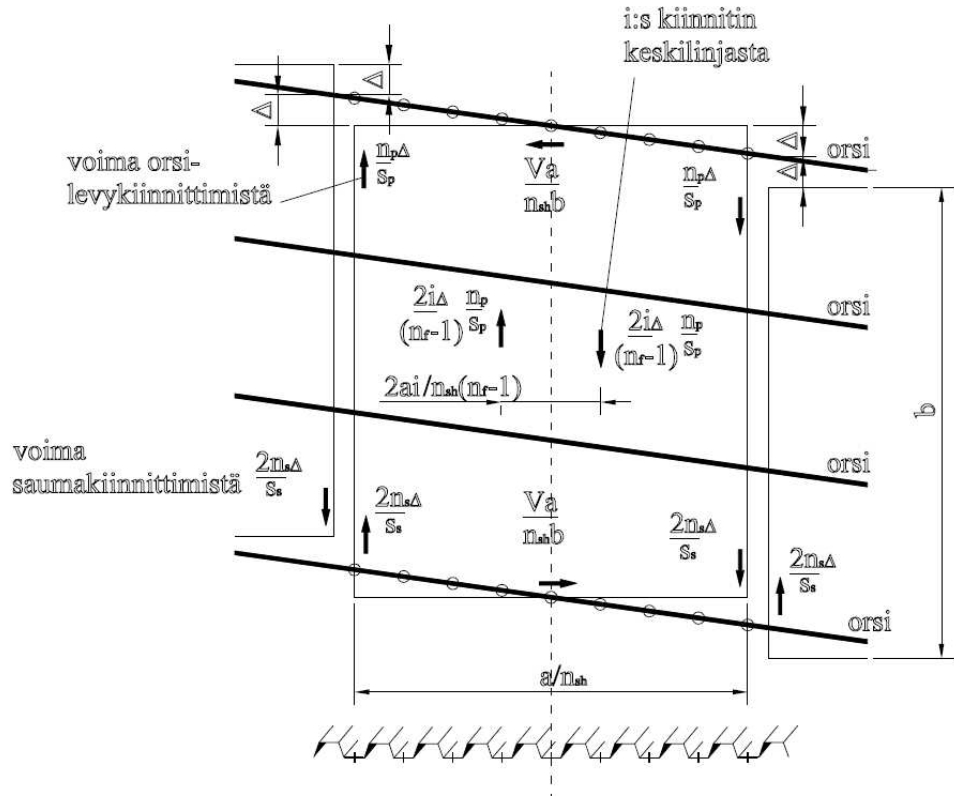
$$\alpha_3 = \frac{1}{1 + \sum_1^{(n_p-2)/2} \left(1 - \frac{2i}{n_p-1}\right)^2}, \quad (23)$$

missä n_p on orsien lukumäärä.

Levyjen välisen sauman liukumasta aiheutuva joustavuus $c_{2.2}$

Siirtymät saumojen kohdalla ovat kaikkialla yhtä suuria ja tässä niistä käytetään merkintää 2Δ . Saumakiinnittimien lukumäärälle käytetään merkintää n_s . Tämä ei sisällä niitä saumakiinnittimiä, jotka läpäisevät sekä levyn että alapuolisen orren. Orsien lukumäärälle käytetään merkintää n_p , saumakiinnittimien joustavuudelle merkintää s_s ja

orsikiinnittimien joustavuudelle merkintää s_p . Siten pystysauman kiinnittimien jäykkyys on n_s/s_s ja pystysaumassa olevien orsikiinnittimien jäykkyys on n_p/s_p . n_f on levyssä olevien kiinnittimien määrä orsien suunnassa. (Davies, J. M. ja Bryan, E. R. 1982, s. 211)



Kuva 3: Osalevy, saumakiinnitykset profiilin kourussa

Tarkastellaan ensin kuvan 3 tapausta, jossa sauman kiinnittimet ovat kourussa ja kiinnittimien määrä on pariton. Momenttitasapainoehto on

$$\frac{2n_s}{s_s} \Delta \frac{a}{n_{sh}} + \sum_{i=1}^{(n_f-1)/2} \frac{2i}{(n_f-1)} \frac{n_p}{s_p} \Delta \frac{2ai}{n_{sh}(n_f-1)} - \frac{Va}{n_{sh}b} b = 0, \quad (24)$$

josta saadaan

$$\frac{V}{\Delta} = \frac{2n_s}{s_s} + \frac{\beta_1 n_p}{s_p} \quad (25)$$

missä

$$\beta_1 = \sum_{i=1}^{(n_f-1)/2} \left(\frac{2i}{n_f-1} \right)^2, \text{ kun } n_f \text{ on pariton ja } \beta_1 = \sum_{i=1}^{n_f/2} \left(\frac{2i-1}{n_f-1} \right)^2, \text{ kun } n_f \text{ on parillinen.}$$

Nämä tulokset β_1 :lle perustuvat oletukselle, että voimajakauma kiinnittimissä on orsien suunnassa lineaarinen. Davies ja Bryan (Davies, J. M. ja Bryan, E. R. 1982, s. 217) ovat kuitenkin tulleet siihen tulokseen, että parabolisen voimajakauman oletuksella tulokset voivat olla jopa parempia lineaariseen malliin verrattuna. Siten kaavat β_1 :lle ovat (ECCS 1995, Annex C.1)

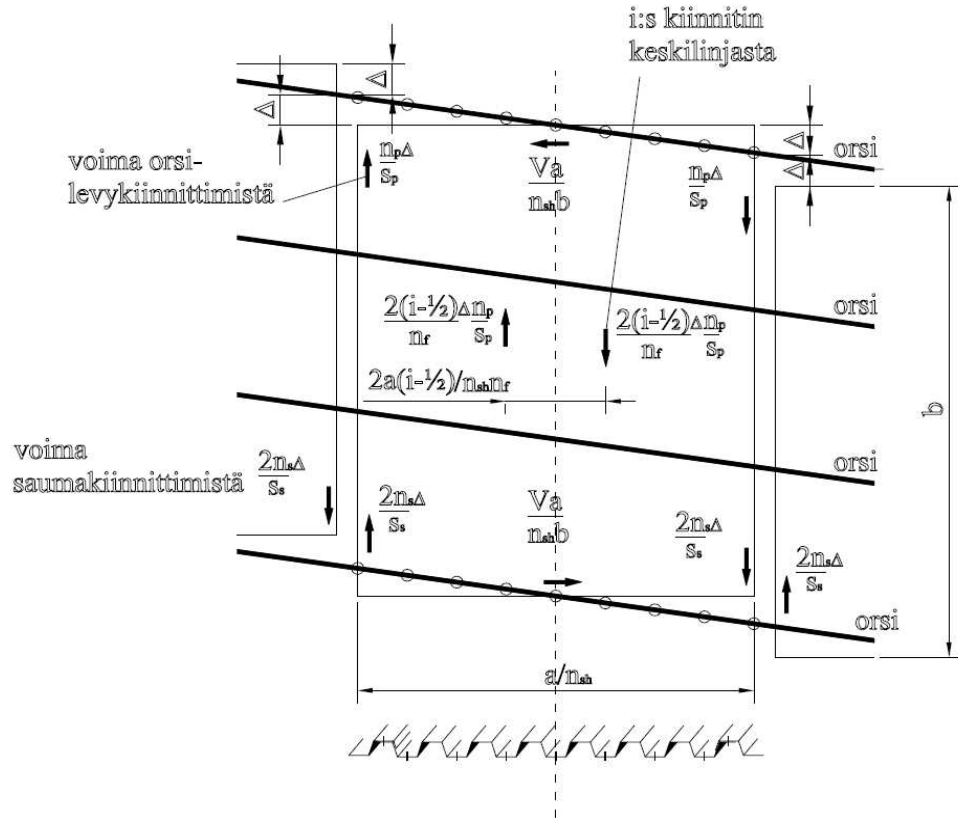
$$\beta_1 = \sum_{i=1}^{(n_f-1)/2} \left(\frac{2i}{n_f-1} \right)^3 \text{ kun } n_f \text{ on pariton ja } \beta_1 = \sum_{i=1}^{n_f/2} \left(\frac{2i-1}{n_f-1} \right)^3, \text{ kun } n_f \text{ on parillinen.}$$

Saumojen jousto $c_{2.2}$ voidaan nyt laskea summaamalla $2\Delta/V$ kaikkien sisäsaumojen $(n_{sh}-1)$ yli. Kaavasta (25) seuraa

$$\frac{\Delta}{V} = \frac{s_s s_p}{2n_s s_p + \beta_1 n_p s_p} \quad (26)$$

ja tulokseksi saadaan

$$c_{2.2} = \frac{2\Delta}{V} (n_{sh}-1) = \frac{2s_s s_p (n_{sh}-1)}{2n_s s_p + \beta_1 n_p s_s} \quad (27)$$



Kuva 4: Osalevy, saumakiinnitykset profiilin harjalla

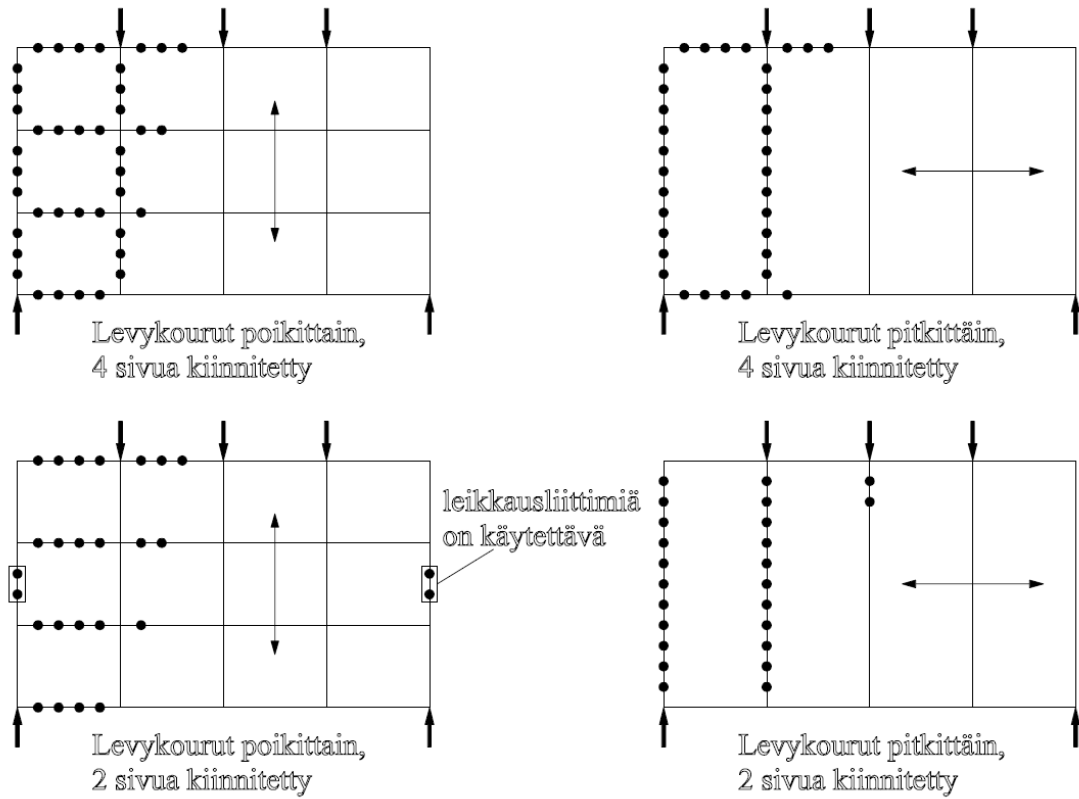
Kuvan 4 tapauksessa saumakiinnittimet ovat profiilin harjalla, jolloin orsikiinnittimet jäävät pois. Peruslähestymistapa on sama ja kaavat muuttuvat vain vähän. Kun kiinnittimet ovat profiilin harjalla, β_1 – termit ovat (ECCS 1995, Annex C.1)

$$\beta_1 = \sum_{i=1}^{(n_f-1)/2} \left(\frac{2i}{n_f} \right)^2, \text{ kun } n_f \text{ on pariton ja } \beta_1 = \sum_{i=1}^{n_f/2} \left(\frac{2i-1}{n_f} \right)^2, \text{ kun } n_f \text{ on parillinen.}$$

Parabolisen voimajakauman oletuksella kaavat β_1 :lle ovat (ECCS 1995, Annex C.1)

$$\beta_1 = \sum_{i=1}^{(n_f-1)/2} \left(\frac{2i}{n_f} \right)^3, \text{ kun } n_f \text{ on pariton ja } \beta_1 = \sum_{i=1}^{n_f/2} \left(\frac{2i-1}{n_f} \right)^3, \text{ kun } n_f \text{ on parillinen.}$$

Pääkannattajakiinnityksen liukumasta aiheutuva joustavuus $c_{2,3}$



Kuva 5: Levyjen kiinnitystapaukset joustavuustermissä $c_{2,3}$

Johdetaan ensin kaava joustavuudelle $c_{2,3}$ tapauksessa, jossa jäykistettä käsitellään ulokepalkkina ja levykourut ovat rakenteen poikittaissuunnassa (Davies, J. M. ja Bryan, E. R. 1982, s. 215). Kun jäykistelevy on kiinnitetty tukirakenteeseen neljältä sivulta, voidaan olettaa, että kaikki leikkausvoimat kulkevat leikkausliittimien tai vastaavien osien kautta.

Joustavuus jokaisessa pääkannattajassa on

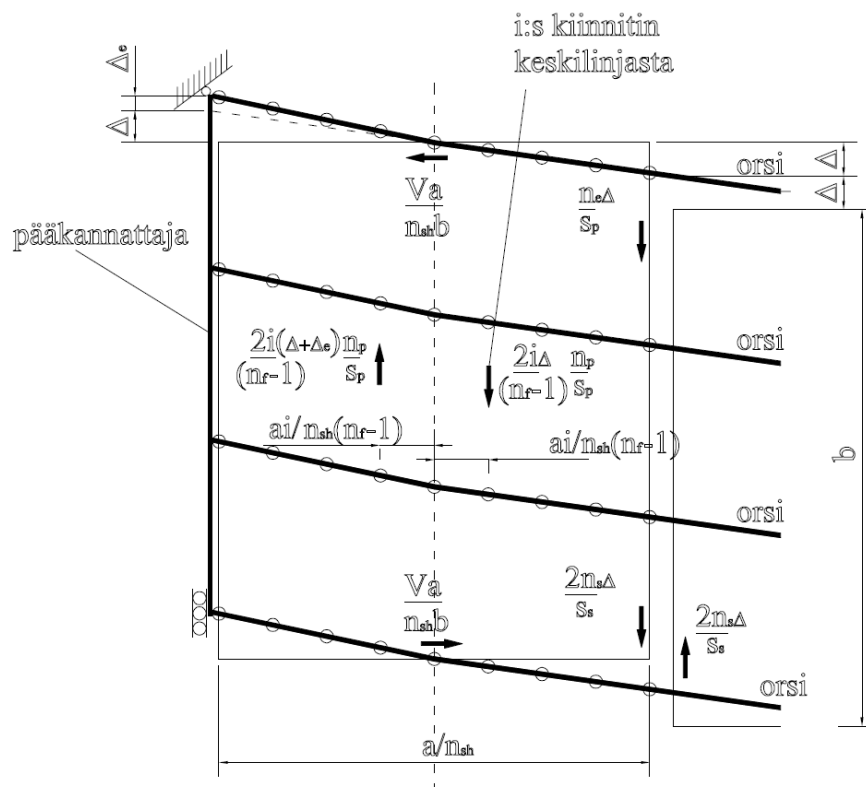
$$c_{2,3} = \frac{s_{sc}}{n_{sc}}, \quad (28)$$

missä s_{sc} on leikkausliittimien kiinnittimien jousto (mm/kN) ja n_{sc} on leikkausliittimien kiinnittimien lukumäärä pääkannattajassa.

Kun jäykistelevyllä on kosketus kahteen pääkannattajaan, joustavuus on vastaavasti

$$c_{2,3} = \frac{2s_{sc}}{n_{sc}}. \quad (29)$$

Mikäli jäykistelevy on kiinnitetty tukirakenteeseen vain kahdelta sivulta, kokonaisleikkausvoima pääkannattimista täytyy siirtää jäykistelevylle orsi-pääkannatin- ja orsi-levykiinnittimien kautta. Kuvassa 6 on esitetty oletettu tilanne päädyn levykentässä. Hankaluutena tässä on se, että jos ensimmäisen sauman liukuman oletetaan olevan 2Δ (niin kuin sen täytyykin olla, jos kaikki sisemmät osapaneelit käyttäytyvät samoin, ja jos siirtymä on oletetusti lineaarinen), saadaan vain yksi muuttuja Δ_e , jonka on toteutettava sekä pystyvoimien että momentin tasapainoehto. Riittävän tarkka tulos saadaan, kun edellytetään vain pystyvoimien tasapainoehdon toteutuvan. Momenttitasapainon rikkomisella ei ole tässä tapauksessa merkittäviä seurauksia, ja mikäli siirtymätermi valittaisiin toisella tavalla, se mutkistaisi huomattavasti laskukaavoja. (Davies, J. M. ja Bryan, E. R. 1982, s. 215)



Kuva 6: Päädyn osalevy

Mikäli jäykistelevy on kiinnitetty tukirakenteeseen vain kahdelta sivulta ja oletetaan, että kiinnittimien määrä n_f on pariton, pystytasapainoehdoksi saadaan kuvan 6 mukaan

$$\sum_{i=1}^{(n_f-1)/2} \left[\frac{2i(\Delta + \Delta_e)}{(n_f-1)} \frac{n_p}{s_p} - \frac{2i\Delta}{(n_f-1)} \frac{n_p}{s_p} \right] - \frac{2\Delta n_s}{s_s} = 0, \quad (30)$$

josta seuraa

$$\Delta_e \sum_{i=1}^{(n_f-1)/2} \frac{2i}{n_f-1} = \frac{2n_s s_p}{s_s n_p} \Delta \quad (31)$$

ja siirtymälle Δ_e tulos

$$\Delta_e = \frac{2n_s s_p}{\beta_2 s_s n_p} \Delta, \quad (32)$$

missä

$$\beta_2 = \sum_{i=1}^{(n_f-1)/2} \left(\frac{2i}{n_f-1} \right), \text{ kun } n_f \text{ on pariton ja } \beta_2 = \sum_{i=1}^{n_f/2} \left(\frac{2i-1}{n_f-1} \right), \text{ kun } n_f \text{ on parillinen.}$$

Parabolisen voimajakauman oletuksella kaavat β_2 :lle ovat (ECCS 1995, Annex C.1)

$$\beta_2 = \sum_{i=1}^{(n_f-1)/2} \left(\frac{2i}{n_f-1} \right)^2, \text{ kun } n_f \text{ on pariton ja } \beta_2 = \sum_{i=1}^{n_f/2} \left(\frac{2i-1}{n_f-1} \right)^2, \text{ kun } n_f \text{ on parillinen.}$$

Levyn ja orren pään välinen kokonaisliukuma on

$$\Delta + \Delta_e = \frac{(2n_s s_p + \beta_2 s_s n_p)}{\beta_2 s_s n_p} \Delta \quad (33)$$

ja käyttämällä kaavasta (26) saatua sisälevyn puolikkaan sauman liukumaa saadaan

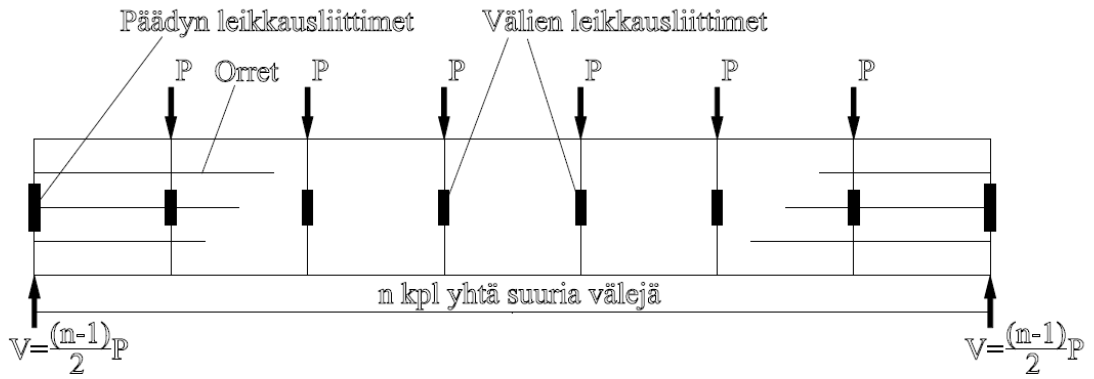
$$\frac{\Delta + \Delta_e}{V} = \frac{s_p}{\beta_2 n_p} \left(\frac{2n_s s_p + \beta_2 s_s n_p}{2n_s s_p + \beta_1 n_p s_p} \right). \quad (34)$$

Suluissa oleva termi on aina lähellä ykköstä, joten voidaan ottaa käyttöön yksinkertaisempi likikaava

$$\frac{\Delta + \Delta_e}{V} = \frac{s_p}{\beta_2 n_p}. \quad (35)$$

Suhteellinen kokonaissiirtymä levyn ja päädyn pääkannattimen välillä saadaan lisäämällä kaavaan (35) orren ja pääkannattimen välisestä kiinnityksestä johtuva joustavuuden lisäys. Jos näissä liitoksissa joustavuus on s_{pr} , saadaan pääkannattimien kiinnittimien joustavuudeksi

$$c_{2.3} = \frac{2s_p}{\beta_2 n_p} + \frac{2s_{pr}}{n_p} = \frac{2}{n_p} \left(s_{pr} + \frac{s_p}{\beta_2} \right) \quad (36)$$



Kuva 7: Kaksitukinen jäykistelevypalkki, jonka kaikki osakentät on kiinnitetty neljältä sivulta

Johdetaan kaava joustavuudelle $c_{2.3}$ tapauksessa, jossa jäykistettä käsitellään kaksitukisena palkkina ja levykourut ovat rakenteen poikittaissuunnassa. Jokainen yksittäinen levykenttä on kiinnitetty kantavaan rakenteeseen neljältä sivulta (leikkausliittimien suunnitteluun johtava tarkastelu on esitetty kuvassa 7). Välien leikkausliittimet siirtävät yksittäisen pistekuorman P kehiltä levyille samalla, kun päädyt ottavat vastaan koko leikkausvoiman

$$V = \frac{(n-1)P}{2}. \quad (37)$$

Tavallisesti välien leikkausliittimissä on n'_{sc} kappaletta kiinnittimiä kantamaan kuorman P samalla, kun päätyjen leikkausliittimissä on oltava

$$n_{sc} = \frac{(n-1)n'_{sc}}{2} \quad (38)$$

kiinnitintä kantamaan paljon suurempi leikkausvoima. Siirtymä sekä päädyn että välien leikkausliittimissä on sama

$$\frac{s_{sc}}{n'_{sc}} = \left(\frac{n-1}{2} \right) \frac{s_{sc}}{n_{sc}}, \quad (39)$$

missä s_{sc} on leikkausliittimen yhden kiinnittimen joustavuus (mm/kN).

Kokonaistaipuma rakenteen keskellä on siten

$$\Delta_{2.3} = \frac{(n-1)}{2} \frac{s_{sc}}{n'_{sc}} + \frac{(n-1)}{2} \frac{s_{sc}}{n_{sc}} = \frac{(n+1)}{2} \frac{s_{sc}}{n'_{sc}} \quad (40)$$

Koska leikkauksen aiheuttama maksimitaipuma (katso Luku 3.1) keskellä on

$$\Delta_{\max} = \frac{cn^2 P}{8}, \quad (41)$$

voidaan taipumat merkitä yhtä suuriksi

$$\Delta_{2.3} = \frac{(n+1)}{2} \frac{s_{sc}}{n'_{sc}} = c_{2.3} \frac{n^2 P}{8}, \quad (42)$$

missä $c_{2.3}$ on yhden levykentän keskimääräinen joustavuus. Saadaan siis

$$c_{2.3} = \frac{4(n+1)}{n^2} \frac{s_{sc}}{n'_{sc}}. \quad (43)$$

Kun jokainen yksittäinen levy on kiinnitetty tukirakenteeseen kahdelta sivulta, siirtymä jokaisessa välin pääkannattajassa on (vertaa kaavaan (51))

$$\left(s_{pr} + \frac{s_p}{\beta_2} \right) \frac{P}{n_p}, \quad (44)$$

missä s_p on joustavuus yhtä orsi-levykiinnitintä kohden (mm/kN) ja s_{pr} joustavuus yhtä pääkannattaja-orsikiinnitintä kohden (mm/kN).

Kokonaissiirtymä keskellä on siten

$$\left(\frac{n-1}{2} \right) \left(s_{pr} + \frac{s_p}{\beta_2} \right) \frac{P}{n_p} = c_{2.3} \frac{n^2 P}{8}. \quad (45)$$

Tästä saadaan yhden levykentän keskimääräiselle joustavuudelle

$$c_{2,3} = \frac{4(n-1)}{n^2 n_p} \left(s_{pr} + \frac{s_p}{\beta_2} \right). \quad (46)$$

Tarkastellaan sitten tapausta, jossa jäykistettä käsitellään ulokepalkkina ja levykourut ovat rakenteen pitkittäissuunnassa. Kappaleen 3 kuvassa 3.3 esitettiin toisiaan vastaavat levykentät. Levyjen ollessa pitkittäissuunnassa ulokepalkille pätevät siten kaikilta osin samat kaavat kuin levyjen ollessa poikittaissuunnassa, mutta kertoimella b^2 / a^2 kerrottuna. (ECCS 1995, s. R.44)

Kaksitukisen palkin tapaus vaatii sen sijaan hieman enemmän tarkastelua. Tutkitaan yhtä levykenttää, jonka kourut ovat rakenteen poikittaissuunnassa. Kun jäykistelevy on kiinnitetty tukirakenteeseen neljältä sivulta, voidaan olettaa, että kaikki leikkausvoimat kulkevat leikkausliittimien tai vastaavien osien kautta.

Joustavuus jokaisessa pääkannattajassa on

$$c_{2,3} = \frac{s_{sc}}{n_{sc}}. \quad (47)$$

Kun jäykistelevyllä on kosketus kahteen pääkannattajaan, joustavuus on vastaavasti

$$c_{2,3} = \frac{2s_{sc}}{n_{sc}}. \quad (48)$$

Vastaavan pitkittäissuuntaisen tapauksen joustavuus saadaan kertoimen b^2 / a^2 avulla.

Mikäli jäykistelevy on kiinnitetty tukirakenteeseen vain kahdelta sivulta, päädytään vastaavaan tilanteeseen kuin ulokepalkin tapauksessa, kun levyt ovat poikittain ja kiinnitys on tehty kahdelta sivulta. Tällöin jokaisen sauman joustavuudeksi saadaan kaavan (36) mukaisesti

$$c_{2,3} = \frac{2}{n_p} \left(s_{pr} + \frac{s_p}{\beta_2} \right). \quad (49)$$

Ottaen huomioon, että tapauksen osalta on kyse vain kahdesta orresta, saadaan lopulta

$$c_{2,3} = s_{pr} + \frac{s_p}{\beta_2}. \quad (50)$$

Vastaavan pitkittäissuuntaisen tapauksen joustavuus saadaan jälleen kertoimen b^2/a^2 avulla.

Liite 3B: Alfa- ja beeta-kertoimien määrittämisohjelma

```
% Alfa- ja beeta-kertoimien määrittämisohjelma
% -----
% Sisäänmenoparametrit:
% np orsien lukumäärä (reunaorret mukaanluettuna) jäykistelevyissä
% nps orsien lukumäärä yhtä levyn pituutta kohden
% nf levyssä olevien kiinnittimien määrä leveyssuunnassa
% nb levypaneelien määrä jäykistelevyn korkeussuunnassa
% nl levypituuksien lukumäärä
% alf1T Kerrointaulukko alf1
% cas on 1, kun levyt on kiinnitetty toisiinsa profiilin
ylälaipasta ja 2, kun alalaipasta
% Ulostuloparametrit:
% alf1 Kerroin alf1
% alf2 Kerroin alf2
% alf3 Kerroin alf3
% alf4 Kerroin alf4
% alf5 Kerroin alf5
% beel Kerroin beeta1
% bee2 Kerroin beeta2
function
[alf1,alf2,alf3,alf4,alf5,beel,bee2]=alfbet(nps,np,nf,nb,nl,cas,alf1T,alf5T);
if nps>20 % alf1:n määrittäminen
    alf1=0.6;
else
    alf1=alf1T(nps-1);
end
a2(1)=(1-2*(1/(np-1)));
% apusuure a2 alf2:n laskemista varten
if np==2
    alf2=1; % alf2, kun np=2
elseif np/2==int8(np/2) % parillinen
    for i=1:(np-2)/2
        a2(i+1)=a2(i)+(1-2*(i+1)/(np-1));
    end
    alf2=1/(1+a2((np-2)/2)); % alf2, kun np on parillinen
else
    for i=1:(np-1)/2 % pariton
        a2(i+1)=a2(i)+(1-2*(i+1)/(np-1));
    end
    alf2=1/(1+a2((np-1)/2)); % alf2, kun np on pariton
end
a3(1)=(1-2*(1/(np-1)))^2;
% apusuure a3 alf3:n laskemista varten
if np==2
    alf3=1; % alf3, kun np=2
elseif np/2==int8(np/2) % parillinen
    for i=1:(np-2)/2
```



```

        a3(i+1)=a3(i)+(1-2*(i+1)/(np-1))^2;
    end
    alf3=1/(1+a3((np-2)/2));      % alf3, kun np on parillinen
else
    for i=1:(np-1)/2              % pariton
        a3(i+1)=a3(i)+(1-2*(i+1)/(np-1))^2;
    end
    alf3=1/(1+a3((np-1)/2));      % alf3, kun np on pariton
end
if nb==1
    alf4=1;
else
    alf4=1+0.3*nb;
% kerroin poimulevyjen määrän huomioon ottamiseksi
end
if cas==1                          % kiinnitetty profiilin ylälaipasta
    if nf/2==int8(nf/2)            % parillinen
        b1(1)=((2*1-1)/nf)^3;
% apusuure b1 beel:n laskemista varten
        for i=1:nf/2-1
            b1(i+1)=b1(i)+((2*(i+1)-1)/nf)^3;
        end
        beel=b1(nf/2);            % beel, kun nf on parillinen
    else                          % pariton
        b1(1)=((2*1)/nf)^3;
        for i=1:(nf-1)/2-1
            b1(i+1)=b1(i)+(2*(i+1)/nf)^3;
        end
        beel=b1((nf-1)/2);        % beel, kun nf on pariton
    end
elseif cas==2                    % kiinnitetty profiilin alalaipasta
    if nf/2==int8(nf/2)            % parillinen
        b1(1)=((2*1-1)/(nf-1))^3;
% apusuure b1 beel:n laskemista varten
        for i=1:nf/2-1
            b1(i+1)=b1(i)+((2*(i+1)-1)/(nf-1))^3;
        end
        beel=b1(nf/2);            % beel, kun nf parillinen
    else                          % pariton
        b1(1)=((2*1)/(nf-1))^3;
        for i=1:(nf-1)/2-1
            b1(i+1)=b1(i)+(2*(i+1)/(nf-1))^3;
        end
        beel=b1((nf-1)/2);        % beel, kun nf pariton
    end
end
else
    error('Vaara cas, aliohjelmassa alfbet');
% virhe, kun cas on erisuuri kuin 1 tai 2
end
if nf/2==int8(nf/2)              % parillinen
    b2(1)=((2*1-1)/(nf-1))^2;
% apusuure b2 bee2:n laskemista varten

```

```

    for i=1:nf/2-1
        b2(i+1)=b2(i)+((2*(i+1)-1)/(nf-1))^2;
    end
    bee2=b2(nf/2); % bee2, kun nf on parillinen
else % pariton
    b2(1)=((2*1)/(nf-1))^2;
    for i=1:(nf-1)/2-1
        b2(i+1)=b2(i)+(2*(i+1)/(nf-1))^2;
    end
    bee2=b2((nf-1)/2); % bee2, kun nf on pariton
end
if nl>5 % alf5:n määrittäminen
    alf5=0.7;
else
    alf5=alf5T(nl-1);
end

```

Liite 3C: K-taulukkojen määrittämisohjelma

```
% K-taulukkojen määrittämisohjelma [K1,K2,alf1T]=taul
% -----
% Ulostuloparametrit:
% K1 kerrointaulukko
% K2 kerrointaulukko
% alf1T kerrointaulukko
function [K1,K2,alf1T,alf5T]=taul
% Taulukko K1
K1(:, :, 1)=[0.013 0.030 0.041 0.041 0.046 0.050 0.066 0.103 0.193
             0.042 0.096 0.131 0.142 0.142 0.153 0.199 0.311 0.602
             0.086 0.194 0.264 0.285 0.283 0.302 0.388 0.601 1.188
             0.144 0.323 0.438 0.473 0.468 0.494 0.629 0.972 1.935
             0.216 0.438 0.654 0.703 0.695 0.729 0.922 1.420 2.837
             0.302 0.674 0.911 0.980 0.965 1.008 1.266 1.938 3.892
             0.402 0.895 1.208 1.300 1.277 1.329 1.661 2.536 5.098
             0.516 1.146 1.546 1.662 1.631 1.692 2.107 3.208
             6.453];
K1(:, :, 2)=[0.014 0.031 0.041 0.044 0.044 0.049 0.066 0.107 0.205
             0.050 0.099 0.128 0.134 0.132 0.146 0.198 0.336 0.652
             0.107 0.202 0.253 0.260 0.254 0.280 0.386 0.681 1.548
             0.188 0.338 0.413 0.417 0.404 0.448 0.629 1.158 2.639
             0.295 0.507 0.604 0.601 0.578 0.648 0.934 1.783 0
             0.429 0.706 0.823 0.806 0.772 0.877 1.306 2.586 0
             0.591 0.935 1.066 1.028 0.983 1.135 1.756 3.605 0
             0.780 1.191 1.328 1.264 1.208 1.423 2.299 4.838 0];
K1(:, :, 3)=[0.016 0.031 0.040 0.042 0.042 0.048 0.065 0.111 0.221
             0.056 0.101 0.123 0.125 0.123 0.139 0.200 0.366 0.873
             0.125 0.204 0.238 0.233 0.226 0.264 0.402 0.786 0
             0.222 0.338 0.375 0.356 0.345 0.418 0.689 1.445 0
             0.349 0.494 0.526 0.486 0.473 0.605 1.082 2.428 0
             0.502 0.668 0.682 0.615 0.608 0.837 1.607 0
             0.677 0.851 0.834 0.736 0.752 1.128 2.308 0
             0.869 1.035 0.975 0.844 0.907 1.494 3.200 0];
K1(:, :, 4)=[0.017 0.031 0.040 0.041 0.041 0.047 0.066 0.115 0.241
             0.062 0.102 0.118 0.115 0.113 0.134 0.209 0.403 0
             0.139 0.202 0.218 0.204 0.200 0.254 0.440 0.945 0
             0.244 0.321 0.325 0.293 0.294 0.414 0.796 0
             0.370 0.448 0.426 0.371 0.396 0.636 1.329 0
             0.508 0.568 0.508 0.434 0.513 0.941 0
             0.646 0.668 0.561 0.483 0.664 1.349 0
             0.768 0.735 0.578 0.527 0.861 0
             0.509 0.423 0.301 0.346 0
             0.509 0.423 0.301 0.346 0];
K1(:, :, 5)=[0.018 0.032 0.039 0.039 0.039 0.046 0.066 0.111 0.276
             0.068 0.101 0.111 0.106 0.104 0.131 0.221 0.452 0
             0.148 0.193 0.194 0.174 0.177 0.255 0.492 0
             0.249 0.289 0.267 0.230 0.259 0.444 0.931 0
             0.356 0.372 0.315 0.270 0.364 0.725 0
             0.448 0.420 0.326 0.303 0.512 0
             0.509 0.423 0.301 0.346 0
             0.509 0.423 0.301 0.346 0];
```

```

0.521 0.372 0.259 0.413 0 0 0 0 0];
K1(:, :, 6)=[0.019 0.032 0.038 0.038 0.038 0.045 0.068 0.126 0.313
0.072 0.099 0.103 0.095 0.095 0.129 0.236 0.513 0
0.151 0.178 0.166 0.144 0.160 0.268 0.557 0 0
0.238 0.244 0.204 0.176 0.247 0.494 0 0 0
0.306 0.272 0.203 0.204 0.376 0 0 0 0
0.333 0.248 0.172 0.241 0 0 0 0 0
0.300 0.174 0.142 0 0 0 0 0 0
0.204 0.081 0 0 0 0 0 0 0];
K1(:, :, 7)=[0.020 0.032 0.037 0.036 0.036 0.044 0.070 0.133 0
0.075 0.095 0.094 0.084 0.087 0.132 0.256 0 0
0.148 0.157 0.135 0.116 0.152 0.291 0 0 0
0.208 0.186 0.139 0.139 0.253 0 0 0 0
0.226 0.161 0.112 0.176 0 0 0 0 0
0.180 0.089 0.093 0 0 0 0 0 0
0.077 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0];
K1(:, :, 8)=[0.021 0.032 0.036 0.034 0.034 0.043 0.072 0.142 0
0.076 0.089 0.083 0.072 0.082 0.137 0.281 0 0
0.137 0.130 0.102 0.093 0.151 0 0 0 0
0.162 0.119 0.082 0.120 0 0 0 0 0
0.123 0.059 0 0 0 0 0 0 0
0.032 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0];
K1(:, :, 9)=[0.023 0.032 0.034 0.032 0.032 0.043 0.075 0.155 0
0.075 0.081 0.070 0.060 0.077 0.146 0 0 0
0.116 0.096 0.068 0.078 0 0 0 0 0
0.100 0.053 0.048 0 0 0 0 0 0
0.024 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0];
K1(:, :, 10)=[0.024 0.031 0.032 0.029 0.030 0.043 0.079 0 0
0.071 0.069 0.056 0.050 0.073 0 0 0 0
0.086 0.057 0.041 0 0 0 0 0 0
0.032 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0];
% Taulukko K2
K2(:, :, 1)=[0.014 0.025 0.036 0.046 0.054 0.061 0.070 0.108 0.211
0.031 0.065 0.099 0.129 0.151 0.169 0.206 0.318 0.649
0.054 0.123 0.192 0.252 0.294 0.328 0.402 0.608 1.269
0.084 0.202 0.316 0.414 0.482 0.535 0.653 0.968 2.056
0.123 0.299 0.468 0.614 0.712 0.790 0.958 1.410 3.006
0.169 0.415 0.649 0.846 0.982 1.090 1.318 1.928 4.113
0.222 0.549 0.855 1.108 1.286 1.433 1.730 2.525 5.383
0.284 0.699 1.086 1.398 1.623 1.818 2.196 3.198
6.811];
K2(:, :, 2)=[0.089 0.138 0.184 0.228 0.269 0.311 0.359 0.432 0.590

```

```

0.300 0.433 0.564 0.690 0.810 0.934 1.091 1.358 2.046
0.627 0.872 1.113 1.345 1.569 1.806 2.125 2.710 4.441
1.076 1.453 1.826 2.187 2.535 2.910 3.446 4.498 8.057
1.644 2.171 2.694 3.205 3.703 4.244 5.058 6.761 12.94
2.280 2.961 3.639 4.313 4.999 5.797 6.971 9.571 0
2.961 3.803 4.620 5.443 6.347 7.479 9.206 13.01 0
3.802 4.838 5.788 6.612 7.701 9.257 11.76 17.20 0];
K2(:, :, 3)=[0.091 0.140 0.186 0.229 0.270 0.312 0.362 0.440 0.627
0.312 0.446 0.575 0.699 0.817 0.943 1.112 1.425 2.472
0.665 0.907 1.144 1.370 1.589 1.835 2.204 2.979 0
1.156 1.529 1.891 2.239 2.578 2.984 3.655 5.251 0
1.793 2.313 2.819 3.305 3.782 4.397 5.519 7.872 0
2.533 3.206 3.858 4.509 5.192 6.096 7.875 0 0
3.334 4.148 4.949 5.780 6.737 8.112 10.82 0 0
4.236 5.170 6.051 7.066 8.404 10.47 12.59 0 0];
K2(:, :, 4)=[0.093 0.142 0.188 0.231 0.271 0.313 0.364 0.448 0.682
0.325 0.458 0.586 0.707 0.824 0.953 1.140 1.523 0
0.703 0.942 1.174 1.393 1.610 1.874 2.316 3.411 0
1.237 1.602 1.953 2.285 2.624 3.089 3.981 0 0
1.937 2.443 2.926 3.379 3.869 4.640 6.256 0 0
2.778 3.428 4.058 4.664 5.366 6.581 0 0 0
3.692 4.488 5.273 6.081 7.138 8.902 0 0 0
4.648 5.570 6.516 7.628 9.910 0 0 0 0];
K2(:, :, 5)=[0.096 0.144 0.190 0.232 0.273 0.315 0.368 0.459 0.680
0.339 0.472 0.597 0.716 0.832 0.966 1.177 1.659 0
0.743 0.978 1.204 1.416 1.633 1.927 2.481 0 0
1.317 1.673 2.009 2.325 2.679 3.246 3.840 0 0
2.075 2.559 3.011 3.436 3.993 4.969 0 0 0
3.006 3.625 4.194 4.752 5.588 0 0 0 0
4.042 4.789 5.494 6.272 0 0 0 0 0
5.122 6.013 6.883 7.861 0 0 0 0 0];
K2(:, :, 6)=[0.098 0.147 0.192 0.234 0.274 0.317 0.373 0.475 0.665
0.355 0.485 0.609 0.725 0.840 0.983 1.226 1.566 0
0.784 1.015 1.233 1.437 1.660 2.000 2.589 0 0
1.398 1.740 2.057 2.359 2.753 3.427 0 0 0
2.205 2.659 3.064 3.490 4.114 0 0 0 0
3.199 3.752 4.218 4.797 0 0 0 0 0
4.318 4.941 5.480 0 0 0 0 0 0
5.487 6.132 0 0 0 0 0 0 0];
K2(:, :, 7)=[0.101 0.150 0.194 0.236 0.276 0.319 0.378 0.495 0
0.372 0.500 0.621 0.734 0.850 1.005 1.298 0 0
0.827 1.051 1.260 1.456 1.697 2.098 0 0 0
1.477 1.801 2.092 2.393 2.830 0 0 0 0
2.319 2.727 3.075 3.499 0 0 0 0 0
3.320 3.738 4.041 0 0 0 0 0 0
4.378 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0];
K2(:, :, 8)=[0.105 0.153 0.197 0.238 0.278 0.322 0.385 0.525 0
0.390 0.516 0.634 0.744 0.862 1.035 1.329 0 0
0.872 1.088 1.284 1.476 1.741 0 0 0 0
1.553 1.849 2.105 2.412 0 0 0 0 0
2.400 2.713 0 0 0 0 0 0 0

```

```

3.278 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0];
K2(:, :, 9)=[0.109 0.156 0.200 0.241 0.280 0.325 0.394 0.569 0
0.411 0.538 0.647 0.753 0.878 1.077 0 0 0
0.919 1.122 1.301 1.496 0 0 0 0 0
1.614 1.859 2.085 0 0 0 0 0 0
2.376 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0];
K2(:, :, 10)=[0.114 0.160 0.203 0.243 0.282 0.329 0.409 0 0
0.434 0.553 0.661 0.764 0.899 0 0 0 0
0.965 1.148 1.306 0 0 0 0 0 0
1.634 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0];
% Alfa-taulukot
alf1T=[1 1 0.85 0.70 0.60 0.60 0.60 0.60 0.60 0.60 0.60 0.60 0.60
0.60 0.60 0.60 0.60 0.60 0.60];
alf5T=[1 0.9 0.8 0.7];

```

Liite 3D: Kolmidimensioinen interpolointialiohjelma

```
% Kolmidimensioinen interpolointialiohjelma
% f=int3(x,y,z,xA,yA,zA,dex,dely,delz,fT)
% -----
% Ulostuloparametrit:
% f funktion arvo
% Sisäänmenoparametrit:
% x koordinaatti
% y koordinaatti
% z koordinaatti
% xA taulukon alkupään x-koordinaatti
% yA taulukon alkupään y-koordinaatti
% zA taulukon alkupään z-koordinaatti
% dex x:n jakoväli
% dely y:n jakoväli
% delz z:n jakoväli
% fT funktion arvotaulukko
function f=int3(x,y,z,xA,yA,zA,dex,dely,delz,fT);
i1=ceil((x-xA)/dex+0.5);
i2=i1+1;
j1=ceil((y-yA)/dely+0.5);
j2=j1+1;
k1=ceil((z-zA)/delz+0.5);
k2=k1+1;
xi1=xA+(i1-1)*dex;
xi2=xi1+dex;
yj1=yA+(j1-1)*dely;
yj2=yj1+dely;
zk1=zA+(k1-1)*delz;
zk2=zk1+delz;
xsi1=(xi2-x)/dex;
xsi2=(x-xi1)/dex;
eta1=(yj2-y)/dely;
eta2=(y-yj1)/dely;
zet1=(zk2-z)/delz;
zet2=(z-zk1)/delz;
f=xsi1*eta1*zet1*fT(i1,j1,k1)+xsi2*eta1*zet1*fT(i2,j1,k1)+xsi1*eta2*zet1*fT(i1,j2,k1)+xsi2*eta2*zet1*fT(i2,j2,k1)+xsi1*eta1*zet2*fT(i1,j1,k2)+xsi2*eta1*zet2*fT(i2,j1,k2)+xsi1*eta2*zet2*fT(i1,j2,k2)+xsi2*eta2*zet2*fT(i2,j2,k2);
```

Liite 3E: Joustavuustermien määrittäsaliohjelma

```
% Joustavuustermien määrittäsaliohjelma CEEAPU
% -----
% Ulostuloparametri:
% c on kokonaisleikkausjoustavuus (mm/kN)
% c11 on joustavuuskomponentti c1.1 (mm/kN)
% c12 on joustavuuskomponentti c1.2 (mm/kN)
% c21 on joustavuuskomponentti c2.1 (mm/kN)
% c22 on joustavuuskomponentti c2.2 (mm/kN)
% c23 on joustavuuskomponentti c2.3 (mm/kN)
% Sisäänmenoparametrit:
% t1 on 1, kun levykourut ovat pääkannattajien suunnassa, ja 2,
kun pääkannattajia vastaan kohtisuorassa
% t2 on 1, kun jäykistelevyä käsitellään kaksitukisena palkkina,
ja 2, kun ulokepalkkina
% t3 on 1, kun levyn neljä sivua on kiinnitetty, ja 2, kun kaksi
sivua on kiinnitetty
% a on jäykistelevyn sivumitta kohtisuorassa poimutuksen suuntaa
vastaan (mm)
% b on jäykistelevyn sivumitta poimutuksen suunnassa (mm)
% d on profiilin jakson pituus [mm]
% p on levyn ja orren kiinnittimien keskinäinen väli (usein on d)
% E on teräksen kimmokerroin
% h on profiilin korkeus [mm]
% t on profiililevyn paksuus
% nyy on teräksen Poisson'n luku
% nsh on jäykistelevyn levy-yksiköiden määrä pituussuunnassa
% ns on levyjen saumakiinnittimien määrä yhdessä limisaumassa
(poisluettuna ne, jotka menevät molempien levyjen ja tukiorsien
läpi)
% np on orsien lukumäärä koko matkalla
% n on levypaneelien määrä jäykistelevyn pituudella
% nsc on leikkausliittimien kiinnittimien määrä reunan
pääkannattajassa
% nlsc (kaavoissa n'sc) leikkausliittimien kiinnittimien määrä
välin pääkannattajassa
% sp on levy/orsikiinnittimen jousto
% spr on orsi/pääkannatinkiinnittimien jousto
% ss on saumakiinnittimen jousto
% ssc leikkausliittimien kiinnittimien jousto (mm/kN)
% alf1 on kerroin alfa1
% alf2 on kerroin alfa2
% alf3 on kerroin alfa3
% alf4 on kerroin alfa4
% alf5 on kerroin alfa5
% beel on kerroin beeta1
% bee2 on kerroin beeta2
% K on kerroin K
% pr on levyn sivusuhteen neliö (pr=1, kun levy orsilla)
```



```

function
[c,c11,c12,c21,c22,c23]=ceeapu(t1,t2,t3,a,b,d,p,E,h,t,nyy,nsh,ns,n
p,n,nsc,nlsc,sp,spr,ss,ssc,alf1,alf2,alf3,alf4,alf5,beel,bee2,K,pr
);
if t1==1          % Profiilin kourut pääkannattajien suunnassa
    if t2==1      % Tuenta kaksitukinen palkki
        c11=(a*d^2.5*alf1*alf4*K)/(E*t^2.5*b^2);
        c12=(2*a*alf2*(1+nyy)*(1+2*(h/d)))/(E*t*b);
        c21=(2*a*sp*p*alf3)/b^2;
        c22=(2*ss*sp*(nsh-1))/(2*ns*sp+beel*np*ss);
        if t3==1    % Levy kiinnitetty neljältä sivulta
            c23=(4*(n+1)*ssc)/(n^2*nlsc);
        elseif t3==2 % Levy kiinnitetty kahdelta sivulta
            c23=(4*(n+1)*(spr+sp/bee2))/(n^2*np);
        else error('Vaara t3, aliohjelmassa ceeapu');
    % virhe, kun t3 on erisuuri kuin 1 tai 2
    end
    elseif t2==2    % Tuenta ulokepalkki
        c11=(a*d^2.5*alf1*alf4*K)/(E*t^2.5*b^2);
        c12=(2*a*(1+nyy)*(1+2*(h/d)))/(E*t*b);
        c21=(2*a*sp*p)/b^2;
        c22=(2*ss*sp*(nsh-1))/(2*ns*sp+beel*np*ss);
        if t3==1    % Levy kiinnitetty neljältä sivulta
            c23=2*ssc/nsc;
        elseif t3==2 % Levy kiinnitetty kahdelta sivulta
            c23=(2*(spr+sp/bee2))/(np);
        else error('Vaara t3, aliohjelmassa ceeapu');
    % virhe, kun t3 on erisuuri kuin 1 tai 2
    end
    else error('Vaara t2, aliohjelmassa ceeapu');
    % virhe, kun t2 on erisuuri kuin 1 tai 2
    end
    c=c11+c12+c21+c22+c23
elseif t1==2      % Profiilin kourut pääkannattajia vastaan
    if t2==1      % Tuenta kaksitukinen palkki
        c11=(a*d^2.5*alf5*K)/(E*t^2.5*b^2);
        c12=(2*a*(1+nyy)*(1+2*(h/d)))/(E*t*b);
        c21=(2*a*sp*p)/b^2;
        c22=(ss*sp*(nsh-1))/(ns*sp+beel*ss);
        if t3==1    % Levy kiinnitetty neljältä sivulta
            c23=2*ssc/nsc;
        elseif t3==2 % Levy kiinnitetty kahdelta sivulta
            c23=spr+sp/bee2;
        else error('Vaara t3, aliohjelmassa ceeapu');
    % virhe, kun t3 on erisuuri kuin 1 tai 2
    end
    elseif t2==2    % Tuenta ulokepalkki
        c11=(a*d^2.5*alf1*alf4*K)/(E*t^2.5*b^2);
        c12=(2*a*(1+nyy)*(1+2*(h/d)))/(E*t*b);
        c21=(2*a*sp*p)/b^2;
        c22=(2*ss*sp*(nsh-1))/(2*ns*sp+beel*np*ss);

```

```

        if t3==1          % Levy kiinnitetty neljältä sivulta
            c23=2*ssc/nsc;
        elseif t3==2      % Levy kiinnitetty kahdelta sivulta
            c23=(2*(spr+sp/bee2))/(np);
        else error('Vaara t3, aliohjelmassa ceeapu');
% virhe, kun t3 on erisuuri kuin 1 tai 2
        end
        else error('Vaara t2, aliohjelmassa ceeapu');
% virhe, kun t2 on erisuuri kuin 1 tai 2
        end
        c=pr*(c11+c12+c21+c22+c23)
    else error('Vaara t1, aliohjelmassa ceeapu');
% virhe, kun t1 on erisuuri kuin 1 tai 2
end

```

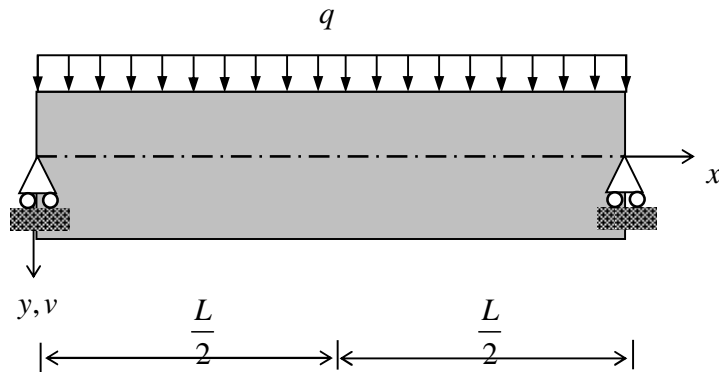
Liite 3F: Joustavuuden c määrittäsohjelma

```
% Joustavuuden c määrittäsohjelma CEET
% -----
% Ulostuloparametri:
% c joustavuus (mm/kN)
[K1,K2,alf1T,alf5T]=taul; % taulukkojen haku, aliohjelman kutsu
aA=0.1;
bA=0.1;
cA=0;
delta=0.1;
deltb=0.1;
deltc=5;
K=int3(hd,ld,theta,aA,bA,cA,delta,deltb,deltc,K1);
% k-kertoimen haku, aliohjelman kutsu
[alf1,alf2,alf3,alf4,alf5,beel,bee2]=alfbet(nps,np,nf,nb,nl,2,alf1
T,alf5T); % alfa- ja beeta-kertoimien haku, aliohjelman kutsu
[c,c11,c12,c21,c22,c23]=ceeapu(1,1,1,a,b,d,p,E,h,t,nyy,nsh,ns,np,n
,nsc,nlsc,sp,spr,ss,ssc,alf1,alf2,alf3,alf4,alf5,beel,bee2,K,pr);
```

Liite 3G: MATLAB:n lähtötietotiedosto

```
% Esimerkki 1, luvussa 8.2
% -----
a=25000;          % jäykistelevyn sivumitta kohtisuorassa
                  poimutuksen suuntaa vastaan (mm)
b=7000;           % jäykistelevyn sivumitta poimutuksen
                  suunnassa (mm)
cr=7000;          % pääkannattajien välimatka (mm)
br=25000;         % katon leveys (mm)
d=237;            % profiilin jakson pituus [mm]
h=112;            % profiilin korkeus [mm]
l=68;             % profiilin ylälaipan pituus
bu=64;            % profiilin alalaipan pituus
p=237;            % levyn ja orren kiinnittimien keskinäinen väli
theta=atan(((d-l-bu)/2)/h)*(180/pi); % profiilin kulma
hd=h/d;
ld=l/d;
A=3000;           % levyn pituussuuntaisen reunarakenteen
                  poikkileikkauksen ala (mm2)
n=9;              % levypaneelien määrä jäykistelevyn pituudella
np=2;             % orsien lukumäärä koko matkalla
nps=2;            % orsien lukumäärä yhtä levyn pituutta kohden
nsc=100;          % levy/leikkausliittimien kiinnittimien määrä
                  reunaniskassa
nlsc=100;
nb=0;             % levypaneelien määrä jäykistelevyn korkeudella
nf=4;             % levyssä olevien kiinnittimien määrä
                  leveyssuunnassa, nf on vähintään 2
nl=2;             % Levypituuksien lukumäärä
E=210;            % teräksen kimmokerroin
nyy=0.3;          % teräksen Poisson'n luku
t=0.636;          % profiililevyn paksuus
sp=0.35;          % levy/orsikiinnittimen jousto
ssc=0.0;          % leikkausliittimien kiinnittimien jousto (mm/kN)
ss=0.25;          % saumakiinnittimen jousto
spr=0.0;
nsh=a/(3*d);      % jäykistelevyn levy-yksiköiden määrä
                  pituussuunnassa
cn3=280;          % saumakiinnittimien etäisyys toisistaan??
ns=b/cn3;         % levyjen saumakiinnittimien määrä yhdessä
limisaumassa (poisluettuna ne, jotka menevät molempien levyjen ja
tukiorsien läpi)
pr=(b/a)^2;       % levyn sivusuhteen neliö
```

Liite 4A: Tasaisen kuorman kuormittaman kaksitukisen Timoshenko –palkin taipuma



Kuva 1: Tasaisen kuorman kuormittama kaksitukinen Timoshenko palkki

Differentiaaliyhtälöt kiertymälle ja taipumalle (Aalto, 2008) ovat

$$\varphi' = -\frac{M}{B}, \quad v' = \varphi + \frac{Q}{S} \quad (1)$$

Taivutusmomentin ja leikkausvoiman lausekkeet ovat

$$M = \frac{1}{2}q(Lx - x^2), \quad Q = q\left(\frac{L}{2} - x\right) \quad (2)$$

Kiertymälle saadaan

$$\varphi(x) = -\int \frac{M}{B} dx + C_1 = -\frac{1}{2B}q \int (Lx - x^2) dx + C_1 = -\frac{1}{2B}q \left(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) + C_1. \quad (3)$$

Ratkaistaan integroimisvakio C_1

$$\varphi\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{1}{24B}qL^3 + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{qL^3}{24B}, \quad (6)$$

joten kiertymän lauseke on

$$\varphi(x) = -\frac{1}{2B}q \left(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) + \frac{qL^3}{24B}. \quad (7)$$

Taipuman derivaatalle saadaan

$$v' = \varphi + \frac{Q}{S} = -\frac{1}{2B}q\left(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) + \frac{qL^3}{24B} + \frac{q}{S}\left(\frac{L}{2}x - x\right), \quad (8)$$

josta integroimalla saadaan taipumalle tulos

$$v(x) = -\frac{1}{2B}q\left(\frac{Lx^3}{6} - \frac{x^4}{12}\right) + \frac{qL^3}{24B}x + \frac{q}{S}\left(\frac{L}{2}x - \frac{1}{2}x^2\right) + C_2. \quad (10)$$

Ratkaistaan integroimisvakio C_2

$$v(0) = -\frac{1}{2B}q\left(\frac{L \cdot 0^3}{6} - \frac{0^4}{12}\right) + \frac{qL^3}{24B} \cdot 0 + \frac{q}{S}\left(\frac{L}{2} \cdot 0 - \frac{1}{2} \cdot 0^2\right) + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0. \quad (11)$$

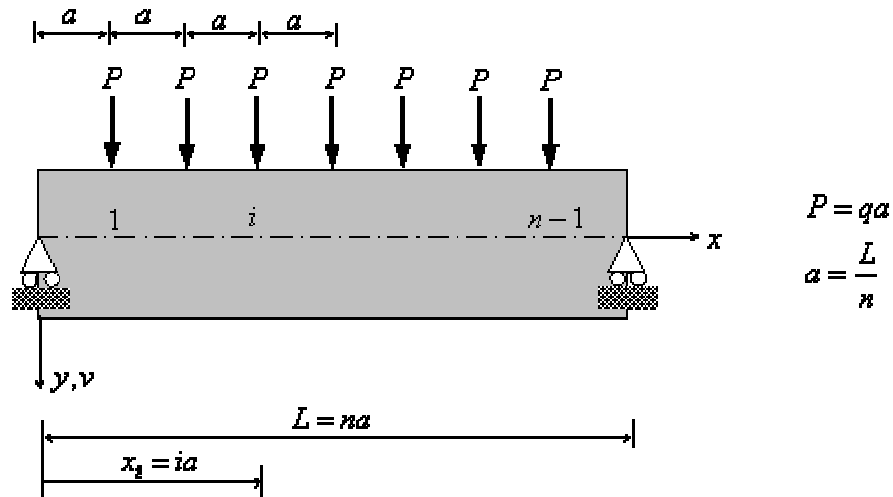
Taipuman lausekkeeksi saadaan nyt

$$v(x) = -\frac{1}{2B}q\left(\frac{Lx^3}{6} - \frac{x^4}{12}\right) + \frac{qL^3}{24B}x + \frac{q}{S}\left(\frac{L}{2}x - \frac{1}{2}x^2\right). \quad (12)$$

Taipuma palkin puolessa välissä on

$$\boxed{v\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{5qL^4}{384B} + \frac{qL^2}{8S}.} \quad (13)$$

Liite 4B: Tasavälisin pistekuormin kuormitetun kaksitukisen Timoshenko –palkin keskipisteen taipuma



Kuva 1: Pistekuormin kuormitettu kaksitukinen Timoshenko –palkki

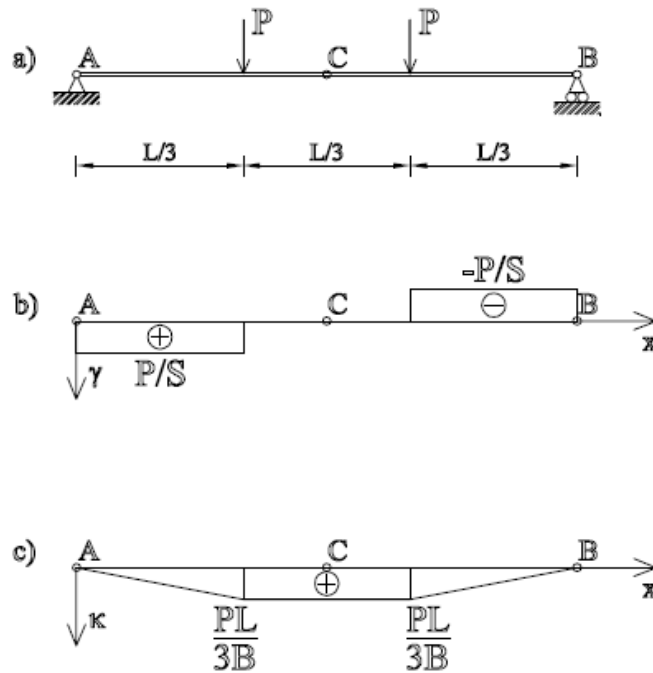
Määritetään tasavälisin pistekuormin kuormitetun Timoshenko –palkin keskipisteen taipuma. Sovelletaan Timoshenko –palkin momenttipintamenetelmää (Aalto 2005, s. 91).

Momenttimenetelmän peruskaava on

$$v_B - v_A = \varphi_A (x_B - x_A) - M_{AB}^{\kappa} + A_{AB}^{\gamma}, \quad (1)$$

missä v_B on taipuma palkin oikeassa päässä, v_A on taipuma palkin vasemmassa päässä, φ_A on kiertymä palkin vasemmassa päässä, x_B on palkin oikean pään koordinaatti, x_A on palkin vasemman pään koordinaatti, M_{AB}^{κ} on käyritymäpinnan $\kappa(x)$ pisteiden x_A ja x_B välisen osan momentti pisteen B suhteen ja A_{AB}^{γ} on liukumakulman $\gamma(x)$ integraali.

Seuraavassa johdetaan palkin keskipisteen C taipuma esimerkkinä, kun palkkia kuormittaa 2 ja 3 pistekuormaa. Kahden pistekuorman tapauksessa ($n=3$) palkin liukumakulma- ja käyritymäkuvio ovat kuvan 2 mukaisia.



Kuva 2: Kahden pistekuorman kuormittama (a) palkki, (b) liukumakulmakuvio ja (c) käyristymäkuvio

Liukumakuvion pinta-aloille väleillä AB ja AC saadaan helposti

$$A_{AB}^{\gamma} = 0, \quad A_{AC}^{\gamma} = \frac{PL}{3S} \quad (2)$$

ja käyristymäkuvion momenteille väleillä AB ja AC saadaan

$$M_{AB}^{\kappa} = \frac{PL^3}{9B}, \quad M_{AC}^{\kappa} = \frac{13PL^3}{648B}. \quad (3)$$

Soveltamalla momenttipintamenetelmän kaavaa (1) välillä AB, saadaan yhtälö

$$v_B - v_A = \varphi_A L - \frac{PL^3}{9B}, \quad (4)$$

josta saadaan ottamalla huomioon reunaehdot $v_A = v_B = 0$ pisteen A kiertymälle tulos

$$\varphi_A = \frac{PL^2}{9B}. \quad (5)$$

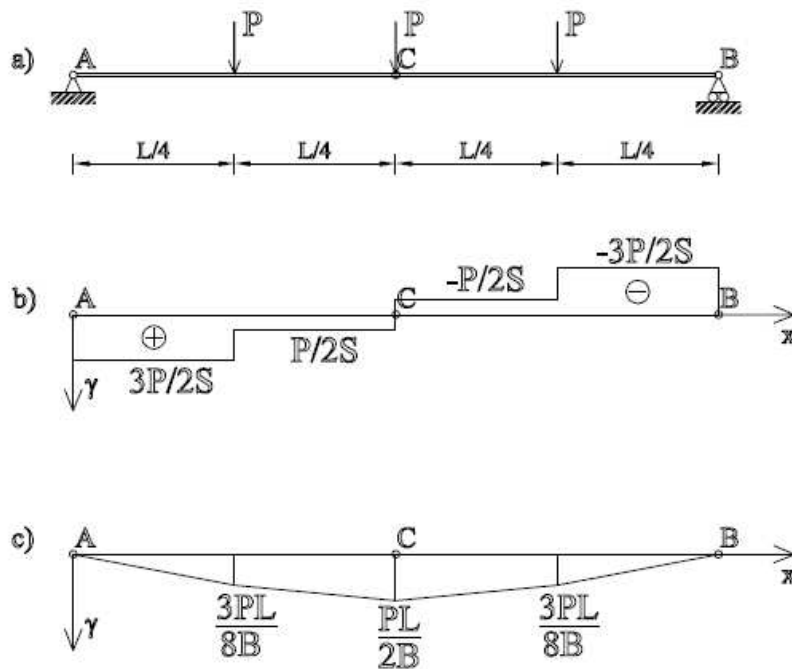
Soveltamalla momenttipintamenetelmän kaavaa (1) välillä AC saadaan yhtälö

$$v_C - v_A = \frac{PL^2}{9B} \frac{L}{2} - \frac{13PL^3}{648B} + \frac{PL}{3S}, \quad (6)$$

josta seuraa ottamalla huomioon reunaehto $v_A = 0$ keskipisteen C taipumalle tulos

$$v_C = \frac{23PL^3}{648B} + \frac{PL}{3S}. \quad (7)$$

Kolmen pistekuorman tapauksessa ($n = 4$) palkin liukumakulma- ja käyrästymäkuvio ovat kuvan 3 mukaiset.



Kuva 3: Kolmen pistekuorman kuormittama (a) palkki, (b) liukumakulmakuvio ja (c) käyrästymäkuvio

Liukumakuvion pinta-aloille väleillä AB ja AC saadaan helposti

$$A_{AB}^{\gamma} = 0, \quad A_{AC}^{\gamma} = \frac{PL}{2S} \quad (8)$$

ja käyrästymäkuvion momenteille väleillä AB ja AC saadaan

$$M_{AB}^{\kappa} = \frac{5PL^3}{32B}, M_{AC}^{\kappa} = \frac{11PL^3}{384B}. \quad (9)$$

Soveltamalla momenttipintamenetelmän kaavaa (1) välillä AB, saadaan yhtälö

$$v_B - v_A = \varphi_A L - \frac{5PL^3}{32B}, \quad (10)$$

josta saadaan ottamalla huomioon reunaehdot $v_A = v_B = 0$ pisteen A kiertymälle tulos

$$\varphi_A = \frac{5PL^2}{32B}. \quad (11)$$

Soveltamalla momenttipintamenetelmän kaavaa (1) välillä AC saadaan yhtälö

$$v_C - v_A = \frac{5PL^2}{32B} \frac{L}{2} - \frac{11PL^3}{384B} + \frac{PL}{2S}, \quad (12)$$

josta seuraa ottamalla huomioon reunaehto $v_A = 0$ keskipisteen C taipumalle tulos

$$v_C = \frac{19PL^3}{384B} + \frac{PL}{2S}. \quad (13)$$

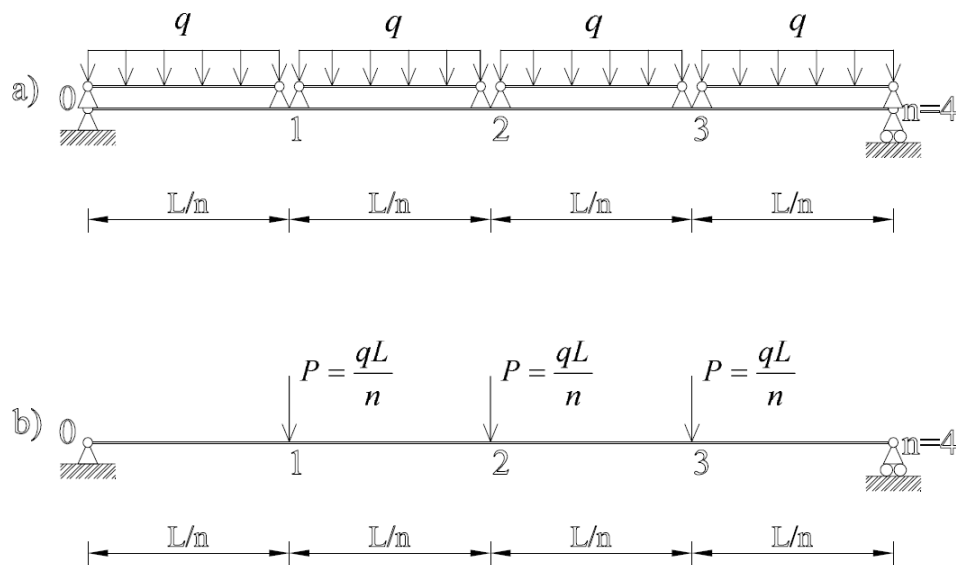
Vastaavaan tapaan menetellen voidaan johtaa tulokset yhden ($n=2$), neljän ($n=5$) ja viiden ($n=6$) pistekuorman tapauksissa. Tulokset on koottu taulukkoon 1.

Taulukko 1: Tasavälisin, yhtä suurin pistekuormin P kuormitetun Timoshenko – palkin keskipisteen C taipumat kuormien eri lukumäärillä.

Kuormat	n	v_c
1	2	$\frac{PL^3}{48B} + \frac{PL}{8S}$
2	3	$\frac{23PL^3}{648B} + \frac{PL}{3S}$
3	4	$\frac{19PL^3}{384B} + \frac{PL}{2S}$
4	5	$\frac{63PL^3}{1000B} + \frac{3PL}{5S}$
5	6	$\frac{11PL^3}{144B} + \frac{3PL}{4S}$

Liite 4C: Kaksitukisen Timoshenko –palkin taipumien vertailu, kun tasan jakautunut kuorma kohdistuu siihen välittömästi tai välillisesti

Välillisen kuormituksen ajatellaan kohdistuvan palkkiin tasavälisinä pistekuormina kuvan 1 mukaisesti.



Kuva 1: (a) Välillinen kuorma q ja (b) sen kanssa ekvivalentit pistekuormat

Kuvan 1 perusteella tasaisen kuorman q kanssa ekvivalentit pistekuormat ovat suuruudeltaan

$$P = \frac{qL}{n}. \quad (1)$$

Sijoittamalla pistekuorman lauseke (1) tasavälisin pistekuormin kuormitetun Timoshenko –palkin keskipisteen taipuman lausekkeeseen (Liite 4B, taulukko 1) voidaan se esittää muodossa

$$v_C = k_b \frac{qL^4}{B} + k_s \frac{qL^2}{S}, \quad (2)$$

missä dimensiottomat kertoimet k_b ja k_s on esitetty taulukossa 1.

Taulukko 1: Kertoimet k_b ja k_s

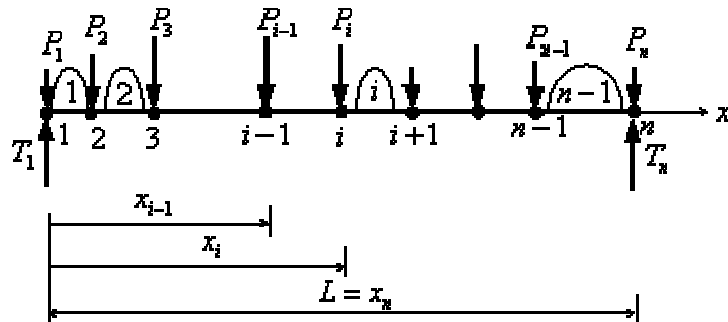
n	k_b	k_b	k_s	k_s
2	1/96	0,01042	1/16	0,06250
3	23/1944	0,01183	1/9	0,11111
4	19/1536	0,01237	1/8	0,12500
5	63/5000	0,01260	3/25	0,12000
6	11/864	0,01273	3/24	0,12500

Taulukosta huomataan, että pistekuormien määrän kasvaessa kertoimien k_b ja k_s arvot lähestyvät alhaalta päin välittömän tasaisen kuorman vastaavia arvoja

$$k_b = \frac{5}{384} \approx 0,01302, \quad k_s = \frac{1}{8} = 0,125.$$

Liite 4D: Epätasavälisin pistekuormin kuormitettu kaksitukinen Timoshenko –palkki

Ratkaistaan epätasavälisin pistekuormin kuormitetun kaksitukisen Timoshenko palkin taipumat.



Kuva 1: Palkin vapaakappalekuvio

Tasapainoehdot (Kuva 1) ovat

$$T_1 + T_n - P_1 - P_2 - P_3 - \dots - P_{i-1} - P_i - P_{i+1} - \dots - P_{n-1} - P_n = 0 \quad (1)$$

$$T_n x_n - P_1 x_1 - P_2 x_2 - P_3 x_3 - \dots - P_{i-1} x_{i-1} - P_i x_i - P_{i+1} x_{i+1} - \dots - P_{n-1} x_{n-1} - P_n x_n = 0, \quad (2)$$

josta seuraa tukireaktioille T_1 ja T_n kaavat

$$T_1 = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^n P_i (x_n - x_i), \quad (3)$$

$$T_n = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^n P_i x_i. \quad (4)$$

Solmun i tasapainoyhtälöksi saadaan kuvan 2(a) perusteella

$$Q^i - P_i - Q^{i+1} = 0, \quad (5)$$

josta seuraa elementin $i + 1$ leikkausvoimalle lauseke

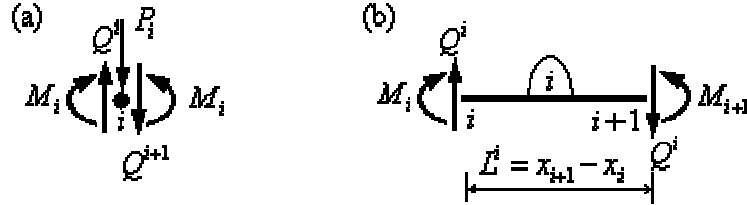
$$Q^{i+1} = Q^i - P_i \quad (6)$$

Elementin i tasapainoyhtälöksi saadaan kuvan 2(b) perusteella

$$M_{i+1} - M_i - Q^i(x_{i+1} - x_i) = 0, \quad (7)$$

josta seuraa solmun $i + 1$ taivutusmomentille lauseke

$$M_{i+1} = M_i + Q^i(x_{i+1} - x_i). \quad (8)$$



Kuva 2: (a) solmun i ja (b) elementin i vapaakappalekuvio.

Taivutusmomentti elementin i alueella on

$$M(x) = M_i \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} + M_{i+1} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{1}{L^i} [M_i x_{i+1} - M_{i+1} x_i + (M_{i+1} - M_i)x]. \quad (9)$$

Sijoitetaan se Timoshenko –palkin kiertymän differentiaaliyhtälöön

$$\varphi' = -\frac{M}{B} \quad (10)$$

ja integroidaan puolittain solmusta i pisteeseen x . Näin kiertymälle $\varphi(x)$ elementin i alueella saadaan lauseke

$$\varphi(x) = \varphi_i - \frac{1}{2B^i L^i} [2(M_i x_{i+1} - M_{i+1} x_i)x + (M_{i+1} - M_i)x^2 - 2M_i x_{i+1} x_i + (M_{i+1} + M_i)x_i^2]. \quad (11)$$

Solmun $i + 1$ kiertymälle saadaan nyt

$$\varphi_{i+1} \equiv \varphi(x_{i+1}) = \varphi_i - \frac{L^i}{2B^i} (M_i + M_{i+1}). \quad (12)$$

Sijoitetaan φ Timoshenko –palkin taipuman differentiaaliyhtälöön

$$v' = \varphi + \frac{Q}{S} \quad (13)$$

ja integroidaan solmusta i pisteeseen x . Näin taipumalle $v(x)$ elementin i alueella saadaan

$$v(x) = v_i + \varphi_i(x - x_i) + \frac{Q^i}{S^i}(x - x_i) - \frac{1}{2B^i L^i}(M_i x_{i+1} x^2 - M_{i+1} x_i x^2 + \frac{1}{3} M_{i+1} x^3 + \\ - \frac{1}{3} M_i x^3 - 2M_i x_{i+1} x_i x + M_{i+1} x_i^2 x + M_i x_i^2 x) - (\frac{1}{3} M_{i+1} x_i^3 + \frac{2}{3} M_i x_i^3 - M_i x_{i+1} x_i^2) \quad (14)$$

Näin solmun $i+1$ taipumalle saadaan lauseke

$$v_{i+1} \equiv v(x_{i+1}) = v_i + \varphi_i L^i + \frac{Q^i}{S^i} L^i - \frac{2M_i + M_{i+1}}{6B^i} L^{i2} \quad (15)$$

Kun kiertymä (12) ja taipuma (15) summataan kaikkien elementtien yli, saadaan

$$\varphi_n = \varphi_1 - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{L^i}{2B^i} (M_i + M_{i+1}) \quad (16)$$

$$v_n = v_1 + \varphi_1 L + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{Q^i}{S^i} L^i - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{2M_i + M_{i+1}}{6B^i} L^{i2} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{L^i}{2B^i} (M_i + M_{i+1})(L - x_{i+1}). \quad (17)$$

Koska palkin päissä $v_1 = 0$ ja $v_n = 0$, saadaan palkin vasemman pään 1 kiertymälle

$$\varphi_1 = \frac{1}{L} \left[- \sum_{i=1}^{n-1} \frac{Q^i}{S^i} L^i + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{2M_i + M_{i+1}}{6B^i} L^{i2} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{L^i}{2B^i} (M_i + M_{i+1})(L - x_{i+1}) \right]. \quad (18)$$

Palkin kiertymät ja taipumat solmuissa $i = 1, \dots, n$ voidaan nyt laskea seuraavasti: Lasketaan tukireaktiot T_1 ja T_n kaavoilla (3) ja (4). Lähtien liikkeelle leikkausvoiman ja taivutusmomentin arvoista solmussa 1, jotka ovat $Q_1 = T_1 - P_1$ ja $M_1 = 0$, voidaan niiden arvot kaikissa muissa solmuissa laskea peräkkäisesti käyttäen kaavoja (6) ja (8). Tämän jälkeen voidaan laskea solmun 1 kiertymä φ_1 kaavalla (18). Tämän jälkeen lähtien liikkeelle solmun 1 kiertymän φ_1 ja taipuman $v_1 = 0$ arvoista, voidaan niiden arvot kaikissa muissa solmuissa laskea perättäisesti käyttäen kaavoja (12) ja (15).

Liite 4E: Kaksitukisen palkin ohjelma

```
% Yksinkertainen elementtimenetelmäohjelma SM2T1
% kaksitukisen palkin taipuman laskemiseksi
% -----
% Sisäänmenoparametrit:
% n pilareiden lukumäärä
% A profiilin poikkileikkausala
% br levyn pituus poimujen suunnassa
% E kimmokerroin
% c jäykisteen leikkausjoustavuus
% L rakennuksen kokonaispituus
% q tasainen kuorma
% x pilareiden sijaintikoordinaatit
% Ulostuloparametrit:
% fii kiertymä
% v taipuma

% Esimerkki 1 (luku 8.2), kaksitukinen palkki
n=10; % Pilareiden lukumäärä tuulen puoleisella
sivulla
c=0.1501; % Jäykisteen joustavuus
x=[0 7000 12000 19000 26000 32000 38000 44000 50000 56000];
% Pilareiden sijaintikoordinaatit

for i=1:n-1
    l(i)=x(i+1)-x(i);
end
L=x(10); % Rakennuksen pituus
B=1.9688e+014*[1 1 1 1 1 1 1 1 1]; % Taivutusjäykkyys
S=l/c; % Leikkausjäykkyys
q=0.9*(7.5/2+0.5)*0.85*1.5+0.005*0.78*25; % Kuorma
P=[q*3.5 q*6 q*6 q*7 q*6.5 q*6 q*6 q*6 q*6 q*3];
% Pilareille tulvat pistekuormat
Tl=0; % Tukireaktio vasemmassa reunassa
Tn=0; % Tukireaktio oikeassa reunassa
for i=1:n
    Tl=Tl+1/L*P(i)*(L-x(i));
    Tn=Tn+1/L*P(i)*x(i);
end
Q(1)=Tl-P(1); % Leikkausvoima vasemmassa reunassa
M(1)=0; % Momentti vasemmassa reunassa
for i=1:n-1
    Q(i+1)=Q(i)-P(i+1);
    M(i+1)=M(i)+Q(i)*(x(i+1)-x(i));
end
f(1)=0; % Apusuure f laskee fii:n arvon x1:ssä
for i=1:n-1
    f(i+1)=f(i)+(1/L)*(-l(i)*Q(i)/S(i)+l(i)*(L-x(i+1))*(M(i)...
        +M(i+1))/(2*B(i))+l(i)^2*(2*M(i)+M(i+1))/(6*B(i)));
end
```



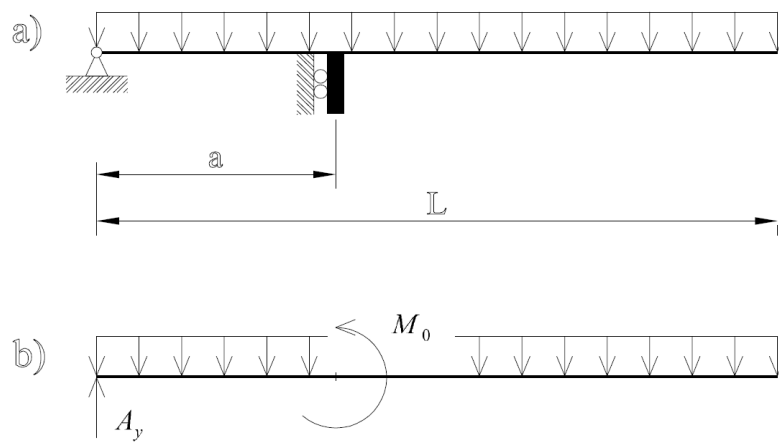
```

fii(1)=f(n);
% Varsinainen fii laskee fii:n arvon kaikissa pisteissä
for i=1:n-1
    fii(i+1)=fii(i)-l(i)*(M(i)+M(i+1))/(2*B(i));
end
v(1)=0; % Taipuma
for i=1:n-1
    v(i+1)=v(i)+fii(i)*l(i)+l(i)*Q(i)/S(i)-
    l(i)^2*(2*M(i)+M(i+1))/(6*B(i));
end

```

Liite 4F: Tasaisen kuorman kuormittama ulokemainen Timoshenko –palkki

Tarkastellaan kuvan 1a Timoshenko –palkkia, joka on vasemmasta päästään siirtymättömästi tuettu ja jonka kiertymä etäisyydellä a vasemmasta päästä on estetty. Erityisesti, kun etäisyys $a = 0$, kysymyksessä on ulokepalkki. Kutsutaan näin tuettua palkkia tässä ulokemaiseksi Timoshenko –palkiksi.



Kuva 1: Tasaisen kuorman kuormittama ulokemainen Timoshenko –palkki: (a) tuennat (b) tukireaktiot

Tukireaktioiksi (Kuva 1b) saadaan

$$A_y = qL, \quad M_0 = \frac{qL^2}{2}. \quad (1)$$

Leikkausvoima ja taivutusmomentti ovat välillä $0 < x < a$

$$Q(x) = q(L - x), \quad (2)$$

$$M(x) = q(Lx - \frac{1}{2}x^2), \quad (3)$$

ja välillä $a < x < L$

$$Q(x) = q(L - x), \quad (4)$$

$$M(x) = q(Lx - \frac{1}{2}x^2) - M_0 = q(Lx - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}L^2). \quad (5)$$

Differentiaaliyhtälöt kiertymälle ja taipumalle ovat

$$\varphi' = -\frac{M}{B}, \quad v' = \varphi + \frac{Q}{S}. \quad (6)$$

Kiertymälle välillä $0 < x < a$ saadaan

$$\varphi(x) = -\int \frac{M}{B} dx + C_1 = -\frac{1}{2B} q \left(Lx^2 - \frac{x^3}{3} \right) + C_1. \quad (7)$$

Ehdosta $\varphi(a) = 0$ seuraa integroimisvakioille C_1

$$C_1 = \frac{1}{6B} q(3La^2 - a^3). \quad (8)$$

Kiertymän lopullinen lauseke välillä $0 < x < a$ on siten

$$\varphi(x) = -\frac{1}{2B} q \left(Lx^2 - \frac{x^3}{3} \right) + \frac{1}{6B} q(3La^2 - a^3). \quad (9)$$

Kiertymälle välillä $a < x < L$ saadaan

$$\varphi(x) = -\int \frac{M}{B} dx + C_1 = -\frac{1}{2B} q \left(Lx^2 - \frac{x^3}{3} - L^2 x \right) + C_1. \quad (10)$$

Ehdosta $\varphi(a) = 0$ seuraa integroimisvakioille C_1

$$C_1 = \frac{1}{6B} q(3La^2 - a^3 - 3L^2 a). \quad (11)$$

Kiertymän lopullinen lauseke välillä $a < x < L$ on siten

$$\varphi(x) = -\frac{1}{2B} q \left(Lx^2 - \frac{x^3}{3} - L^2 x \right) + \frac{1}{6B} q(3La^2 - a^3 - 3L^2 a). \quad (12)$$

Taipumalle välillä $0 < x < a$ saadaan

$$v(x) = \int \left(\varphi + \frac{Q}{S} \right) dx + C_2 = -\frac{1}{2B} q \left(\frac{Lx^3}{3} - \frac{x^4}{12} \right) + \frac{1}{6B} q (3La^2 - a^3)x + \frac{q}{S} \left(Lx - \frac{1}{2}x^2 \right) + C_2 \quad (13)$$

Ehdosta $v(0) = 0$ seuraa integroimisvakiolle C_2

$$C_2 = 0. \quad (14)$$

Taipuman lopullinen lauseke välillä $0 < x < a$ on siten

$$v(x) = -\frac{1}{24B} q (4Lx^3 - x^4) + \frac{1}{6B} q (3La^2 - a^3)x + \frac{q}{S} \left(Lx - \frac{1}{2}x^2 \right). \quad (15)$$

Pisteessä $x = a$ taipumalle saadaan arvo

$$v_a \equiv v(a) = -\frac{qa^4}{8B} + \frac{qLa^3}{3B} + \frac{q}{S} \left(La - \frac{1}{2}a^2 \right). \quad (16)$$

Taipumalle välillä $a < x < L$ saadaan

$$v(x) = \int \left(\varphi + \frac{Q}{S} \right) dx + C_2 = -\frac{1}{2B} q \left(\frac{1}{3}Lx^3 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{2}L^2x^2 \right) + \frac{1}{6B} q (3La^2 - a^3 - 3L^2a)x + \frac{q}{S} \left(Lx - \frac{1}{2}x^2 \right) + C_2. \quad (17)$$

Ehdosta $v(a) = v_a$ seuraa integroimisvakiolle C_2

$$C_2 = \frac{qL^2a^2}{4B}. \quad (18)$$

Taipuman lopullinen lauseke välillä $a < x < L$ on siten

$$v(x) = \frac{q}{24B} [6L^2a^2 + (12La^2 - 4a^3 - 12L^2a)x + 6L^2x^2 - 4Lx^3 + x^4] + \frac{q}{S} \left(Lx - \frac{1}{2}x^2 \right). \quad (19)$$

Liite 4G: Ulokepalkin ohjelma

```
% Yksinkertainen elementtimenetelmäohjelma ULOKE1
% ulokepalkin taipuman laskemiseksi
% -----
% Sisäänmenoparametrit:
% n pilareiden lukumäärä
% at tukimomentin sijainti (solmunnumero)
% c jäykisteen leikkausjoustavuus
% L rakennuksen kokonaispituus
% q tasainen kuorma
% x pilareiden sijaintikoordinaatit
% Ulostuloparametrit:
% fii kiertymä
% v taipuma

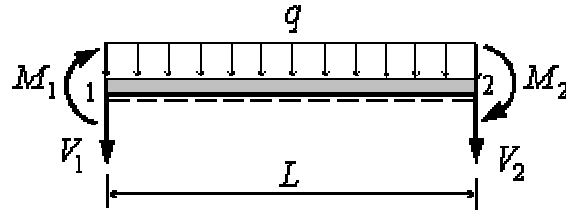
% Esimerkki 1 (luku 8.2), ulokepalkki
n=10; % Pilareiden lukumäärä tuulen puoleisella sivulla
c=0.1501; % Jäykisteen joustavuus
x=[0 7000 12000 19000 26000 32000 38000 44000 50000 56000];
% Pilareiden sijaintikoordinaatit
for i=1:n-1
    l(i)=x(i+1)-x(i);
end
L=x(10); % Rakennuksen pituus
at=6; % Tukimomentin solmun numero
B=1.9688e+014 * [1 1 1 1 1 1 1 1 1]; % Taivutusjäykkyys
S=1/c; % Leikkausjäykkyys
q=0.9*(7.5/2+0.5)*0.85*1.5+0.005*0.78*25; % Kuorma
P=[q*3.5 q*6 q*6 q*7 q*6.5 q*6 q*6 q*6 q*6 q*3];
% Pilareille tulvat pistekuormat
Tl=0; % Tukireaktio vasemmassa reunassa
for i=1:n
    Tl=Tl+P(i);
end
M0(1)=0;
for i=1:n-1
    M0(i+1)=M0(i)+P(i+1)*x(i+1);
end
Q(1)=Tl-P(1); % Leikkausvoima vasemmassa reunassa
Mv(1)=0; % Momentti vasemmassa reunassa
for i=1:n-1
    Q(i+1)=Q(i)-P(i+1); % Leikkausvoima koko palkin alueella
end
for i=1:at-1
    Mv(i+1)=Mv(i)+Q(i)*(x(i+1)-x(i));
% Momentti at:n vasemmalla puolella
end
M0(at)=Mv(at)-M0(n); % Momentti heti at:n oikealla puolella
for i=at:n-1
```

```

        Mo(i+1)=Mo(i)+Q(i)*(x(i+1)-x(i));
% Momentti at:n oikealla puolella
end
f(1)=0;                % Apusuure f laskee fii:n arvon x1:ssä
for i=1:at-1
    f(i+1)=f(i)+l(i)*(Mv(i)+Mv(i+1))/(2*B(i));
end
fii(1)=f(at);
% Varsinainen fii laskee fii:n arvon kaikissa pisteissä
for i=1:at-1
    fii(i+1)=fii(i)-l(i)*(Mv(i)+Mv(i+1))/(2*B(i));
end
for i=at:n-1
    fii(i+1)=fii(i)-l(i)*(Mo(i)+Mo(i+1))/(2*B(i));
end
v(1)=0;                % Taipuma
for i=1:at-1
    v(i+1)=v(i)+fii(i)*l(i)+l(i)*Q(i)/S(i)-
    l(i)^2*(2*Mv(i)+Mv(i+1))/(6*B(i));
end
for i=at:n-1
    v(i+1)=v(i)+fii(i)*l(i)+l(i)*Q(i)/S(i)-
    l(i)^2*(2*Mo(i)+Mo(i+1))/(6*B(i));
end

```

Liite 5A: Tarkan Timoshenko –palkkielementin yhtälöt



Kuva 1: Elementin vapaakappalekuvio

Kuvan 1 perusteella tasapainoehdot ovat

$$V_1 + qL + V_2 = 0 \quad (1)$$

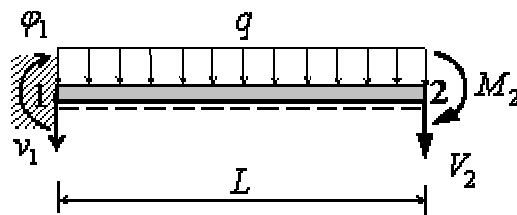
$$M_1 + \frac{1}{2} qL^2 + M_2 + V_2 L = 0 \quad (2)$$

Vapausastevoimille saadaan

$$V_1 = -qL - V_2, \quad (3)$$

$$M_1 = -\frac{1}{2} qL^2 - M_2 - V_2 L. \quad (4)$$

Ajatellaan sitten, että elementti on staattisesti määrätty ulokepalkki, jota kuormittaa tasainen kuorma, jonka vasen kiinnitetty pää saa pakkosiirtymän v_1 ja pakkokiertymän φ_1 , ja jonka oikeassa vapaassa päässä 2 vaikuttavat sauvanpäävoima V_2 ja M_2 (Kuva 2).



Kuva 2: Elementti ulokepalkkina, jonka vasen kiinnitetty pää 1 saa siirtymän v_1 ja kiertymän φ_1 .

Leikkausvoima ja taivutusmomentti ovat

$$Q(x) = -V_1 - qx, \quad (5)$$

$$M(x) = M_1 - \frac{1}{2}qx^2 - V_1x. \quad (6)$$

Differentiaaliyhtälöt kiertymälle ja taipumalle ovat

$$\varphi' = -\frac{M}{B}, \quad v' = \varphi + \frac{Q}{S}. \quad (7)$$

Kiertymälle saadaan

$$\varphi(x) = -\int \frac{M}{B} dx + C_1 = -\frac{1}{B} \left(M_1x - \frac{1}{6}qx^3 - \frac{1}{2}V_1x^2 \right) + C_1. \quad (8)$$

Reunaehdosta $\varphi(0) = \varphi_1$ seuraa integroimisvakiolle C_1

$$C_1 = \varphi_1, \quad (9)$$

joten kiertymän lauseke on

$$\boxed{\varphi(x) = -\frac{1}{B} \left(M_1x - \frac{1}{6}qx^3 - \frac{1}{2}V_1x^2 \right) + \varphi_1.} \quad (10)$$

Taipuman differentiaaliyhtälö on

$$v' = \varphi + \frac{Q}{S} = -\frac{1}{B} \left(M_1x - \frac{1}{6}qx^3 - \frac{1}{2}V_1x^2 \right) + \varphi_1 + \frac{1}{S}(-V_1 - qx), \quad (11)$$

jonka ratkaisuksi saadaan

$$v(x) = -\frac{1}{B} \left(\frac{1}{2}M_1x^2 - \frac{1}{24}qx^4 - \frac{1}{6}V_1x^3 \right) + \varphi_1x + \frac{1}{S} \left(-V_1x - \frac{1}{2}qx^2 \right) + C_2. \quad (12)$$

Reunaehdosta $v(0) = v_1$ seuraa integroimisvakiolle C_2

$$C_2 = v_1, \quad (13)$$

joten taipuman lauseke on

$$\boxed{v(x) = -\frac{1}{B} \left(\frac{1}{2}M_1x^2 - \frac{1}{24}qx^4 - \frac{1}{6}V_1x^3 \right) + \varphi_1x + \frac{1}{S} \left(-V_1x - \frac{1}{2}qx^2 \right) + v_1.} \quad (14)$$

Ehdoista $\varphi(L) = \varphi_2$ ja $v(L) = v_2$ seuraa yhtälöpari

$$-\frac{1}{B}M_1L + \frac{1}{6B}qL^3 + \frac{1}{2B}V_1L^2 + \varphi_1 - \varphi_2 = 0, \quad (15)$$

$$-\frac{1}{B}\left(\frac{1}{2}M_1L^2 - \frac{1}{24}qL^4 - \frac{1}{6}V_1L^3\right) + \varphi_1L + \frac{1}{S}\left(-V_1L - \frac{1}{2}qL^2\right) + v_1 - v_2 = 0, \quad (16)$$

jonka ratkaisuna saadaan vapausastevoimille V_1 ja M_1 lausekkeet

$$V_1 = \frac{B}{L^2(1+\kappa)}\left(6\varphi_1 + 6\varphi_2 + \frac{12}{L}v_1 - \frac{12}{L}v_2\right) - \frac{qL}{2} \quad (17)$$

ja

$$M_1 = \frac{B}{L^2(1+\kappa)}\left((4+\kappa)L\varphi_1 + (2-\kappa)L\varphi_2 + 6v_1 - 6v_2\right) - \frac{1}{12}qL^2, \quad (18)$$

missä on otettu käyttöön lyhennysmerkintä $\kappa = \frac{12B}{SL^2}$.

Tasapainoyhtälöstä (1) seuraa vapausastevoimalle V_2

$$V_2 = -qL - V_1 \quad (19)$$

ja lausekkeen (17) avulla edelleen

$$V_2 = -\frac{B}{L^2(1+\kappa)}\left(6\varphi_1 + 6\varphi_2 + \frac{12}{L}v_1 - \frac{12}{L}v_2\right) - \frac{1}{2}qL \quad (20)$$

Tasapainoyhtälöstä seuraa vapausastevoimalle M_2

$$M_2 = -\frac{1}{2}qL^2 - M_1 - V_2L \quad (21)$$

ja sijoittamalla tähän tulos (18) edelleen

$$M_2 = \frac{B}{L^2(1+\kappa)}\left((2-\kappa)L\varphi_1 + (4+\kappa)L\varphi_2 + 6v_1 - 6v_2\right) + \frac{1}{12}qL^2 \quad (22)$$

Esittämällä lausekkeet (17), (18), (20) ja (22) matriisimuodossa saadaan

$$\{F\}^e = [K]^e \{a\}^e + \{FK\}^e, \quad (23)$$

missä

$$\{F\}^e = \begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}, \{a\}^e = \begin{Bmatrix} v_1 \\ \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix}, \{FK\}^e = \begin{Bmatrix} -qL/2 \\ -qL^2/12 \\ -qL/2 \\ qL^2/12 \end{Bmatrix}$$

$$[K]^e = \frac{B}{L^3(1+\kappa)} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & (4+\kappa)L^2 & -6L & (2-\kappa)L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & (2-\kappa)L^2 & -6L & (4+\kappa)L^2 \end{bmatrix},$$

missä $\{F\}^e$ on elementin vapausastevoimavektori, $\{a\}^e$ on elementin vapausastesiirtymävektori, $\{FK\}^e$ on elementin kuormitustermivektori ja $[K]^e$ on elementin jäykkyyismatriisi.

Sijoittamalla V_1 leikkausvoiman lausekkeeseen (5) saadaan

$$Q(x) = -\frac{B}{L^2(1+\kappa)} \left(\frac{12}{L} v_1 + 6\varphi_1 - \frac{12}{L} v_2 + 6\varphi_2 \right) + qL \left(\frac{1}{2} - \xi \right). \quad (24)$$

Sijoittamalla M_1 ja V_1 taivutusmomentin lausekkeeseen (6) saadaan

$$M(x) = \frac{B}{L^2(1+\kappa)} \left((6-12\xi)v_1 + ((4+\kappa)L-6L\xi)\varphi_1 - (6-12\xi)v_2 + \right. \\ \left. + ((2-\kappa)L-6L\xi)\varphi_2 \right) + \frac{qL^2}{2} \left(\xi - \xi^2 - \frac{1}{6} \right). \quad (25)$$

Sijoittamalla M_1 ja V_1 taipuman lausekkeeseen (14) saadaan

$$v(x) = \frac{1}{(1+\kappa)} (2\xi^3 - 3\xi^2 - \kappa\xi + \kappa + 1)v_1 + \frac{1}{(1+\kappa)} \left(L\xi^3 - \frac{(4+\kappa)L}{2} \xi^2 + \right. \\ \left. + \frac{\kappa L}{2} \xi + L\xi \right) \varphi_1 - \frac{1}{(1+\kappa)} (2\xi^3 - 3\xi^2 - \kappa\xi)v_2 + \frac{1}{(1+\kappa)} \left(L\xi^3 - \frac{(2-\kappa)L}{2} \xi^2 + \right. \\ \left. - \frac{\kappa L}{2} \xi \right) \varphi_2 + \frac{qL^4}{24B} (\xi^4 - 2\xi^3 + \xi^2) + \frac{qL^2}{2S} (\xi - \xi^2). \quad (26)$$

Liite 5B: Elementtiohjelman lähtötieto-ohjelma

```
% Esimerkki 1, (luku 8.2) kaksitukinen palkki
B=1.9688e+014;          % Taivutusjäykkyys
c=0.1501;              % Leikkausjoustavuus
l=[7000 5000 7000 7000 6000 6000 6000 6000 6000];
% Elementtien pituudet
S=l/c;                  % Leikkausjäykkyys
q=0.9*(7.5/2+0.5)*0.85*1.5+0.005*0.78*25; % Kuorma
nsysol=10;              % Solmujen lukumäärä
nele=9;                 % Elementtien lukumäärä
elom=[B S(1) 0          % Elementtien ominaisuudet
      B S(2) 0
      B S(3) 0
      B S(4) 0
      B S(5) 0
      B S(6) 0
      B S(7) 0
      B S(8) 0
      B S(9) 0];
solkoo=[0 7000 12000 19000 26000 32000 38000 44000 50000 56000];
          % Solmujen koordinaatit
nosol=[1 2      % Kuhunkin elementtiin liittyvien solmujen numerot
       2 3
       3 4
       4 5
       5 6
       6 7
       7 8
       8 9
       9 10];
nanv=2;              % Vapausasteiden lukumäärä
anvso=[1 1 0
       10 1 0];
nank=10;             % Solmuihin liittyvät kuormitukset
ankso=[1 1 q*3.5
       2 1 q*6
       3 1 q*6
       4 1 q*7
       5 1 q*6.5
       6 1 q*6
       7 1 q*6
       8 1 q*6
       9 1 q*6
       10 1 q*3];
```

Liite 5C: Palkin analysointiohjelma, elementti-ohjelma

```
% Palkin analysointiohjelma PAL:
% -----
% Ohjelma ratkaisee palkin siirtymamenetelmalla
% kayttaen elementtimenetelman systematiikkaa.
% Parametreja:
% nsyvap systeemivapausasteiden lukumaara
% nsysol systeemisolmujen lukumaara
% nele elementtien lukumaara
% nosol elementtien systeemisolmunumerotaulukko
% novap elementtien systeemivapausastenumerotaulukko
% nanv annettujen vapausasteiden lukumaara
% anvso taulukko, joka sisältää tiedot annetuista vapausasteista
solmuihin liittyen
% - anvso(ianv,1) solmunumero, johon annettu vapausaste liittyy
% - anvso(ianv,2) annetun vapausasteen solmukohtainen
jarjestysnumero
% - anvso(ianv,3) annetun vapausasteen arvo
% noanv annettujen vapausasteiden numerotaulukko
% anv annettujen vapausasteiden arvotaulukko
% nank annettujen vapausastekuormien lukumaara
% ankso taulukko, joka sisältää tiedot annetuista
vapausastekuormista solmuihin liittyen
% - ankso(iank,1) solmunumero, johon annettu vapausastekuorma
liittyy
% - ankso(iank,2) annetun vapausastekuorman solmukohtainen
jarjestysnumero
% - ankso(iank,3) annetun vapausastekuorman arvo
% noank annettujen vapausastekuormien numerotaulukko
% ank annettujen vapausastekuormien arvotaulukko

% Lasketaan systeemivapausasteiden lukumaara
nsyvap=2*nsysol;
% Lasketaan elementtien systeemivapausastenumerotaulukko
novap=lasvap(nele,2,2,nosol);
% Lasketaan annettujen vapausastevoimien numero- ja arvotaulukko
if(nank>0)[noank,ank]=lasanv(nank,ankso,2);end
% Lasketaan annettujen vapausasteiden numero- ja arvotaulukko
[noanv,anv]=lasanv(nanv,anvso,2);
% Maaritellaan systeemimatriisi ks harvaksi
ks=sparse(nsyvap,nsyvap);
% Nollataan systeemivektori rs
rs=zeros(nsyvap,1);
% Kootaan systeemimatriisi ks
ks=kokks(ks,nele,nsyvap,4,nosol,novap,solkoo,elom);
% Kootaan systeemivektori rs
rs=kokrs(rs,nele,nsyvap,4,nosol,novap,solkoo,elom);
% Huomioidaan annetut vapausastekuormat systeemivektorissa
if(nank>0)rs=anvak(rs,nank,noank,ank);end
```

```

% Huomioidaan annetut vapausasteet systeemimatriisissa ja
systeemivektorissa
[ks,rs]=anvap(ks,rs,nanv,noanv,anv);
% Ratkaistaan yhtaloryhma
a=ks\rs;
% Lasketaan elementin sisaisina suureina taipuma, taivutusmomentti
ja leikkausvoima
% elementin alueella tasavalisella jaolla njako annetuissa
pisteissa
njako=20;
[X,V,M,Q]=lasele(njako,nele,nosol,novap,solkoo,elom,a);

```

Liite 5D: Elementtiohjelman aliohjelmot

```
% Systemimatriisin kokoaja-aliohjelma KOKKS:
% -----
% ks=KOKKS(ks,nele,nsyvap,nelvap,nosol,novap,solkoo,elom)
% Aliohjelma kokoaa systemimatriisin ks elementtimatriisin ke
alkioista, jotka
% aliohjelma muoke muodostaa elementti kerrallaan.
% Ulostuloparametri:
% ks systemimatriisi kokoamisen jälkeen
% Sisaanmenoparametrit:
% ks systemimatriisi ennen kokoamista
% nele elementtien lukumaara
% nsyvap systemivapausasteiden lukumaara
% nelvap elementin vapausasteiden lukumaara
% nosol elementtien systemisolmunumerotaulukko
% novap elementtien systemivapausastenumerotaulukko
% solkoo solmujen koordinaattitaulukko
% elom elementtiominaisuustaulukko
function ks=kokks(ks,nele,nsyvap,nelvap,nosol,novap,solkoo,elom);
for iele=1:nele
    ke=muoke(iele,nosol,solkoo,elom);
    for ie=1:nelvap
        is=novap(iele,ie);
        if (is>0)
            for je=1:nelvap
                js=novap(iele,je);
                if (js>0)
                    ks(is,js)=ks(is,js)+ke(ie,je);
                end
            end
        end
    end
end
end

% Systemivektorin kokoaja-aliohjelma KOKRS:
% -----
% rs=KOKRS(rs,nele,nsyvap,nelvap,nosol,novap,solkoo,elom)
% Aliohjelma kokoaa systemivektorin rs elementtivektorin re
alkioista, jotka
% aliohjelma muore muodostaa elementti kerrallaan.
% Ulostuloparametri:
% rs systemivektori kokoamisen jälkeen
% Sisaanmenoparametrit:
% ks systemivektori ennen kokoamista
% nele elementtien lukumaara
% nsyvap systemivapausasteiden lukumaara
% nelvap elementin vapausasteiden lukumaara
% nosol elementtien systemisolmunumerotaulukko
% novap elementtien systemivapausastenumerotaulukko
```

```

% solkoo solmujen koordinaattitaulukko
% elom elementtiominaisuustaulukko

function rs=kokrs(rs,nele,nsyvap,nelvap,nosol,novap,solkoo,elom);
for iele=1:nele
    re=muore(iele,nosol,solkoo,elom);
    for ie=1:nelvap
        is=novap(iele,ie);
        if(is>0)
            rs(is)=rs(is)+re(ie);
        end
    end
end

% Elementin sisaisten suureiden laskentaohjelma LASELE:
% -----
% [X,V,M,Q]=lasele(njako,nele,nosol,novap,solkoo,elom,a)
% Laskee taipuman, taivutusmomentin ja leikkausvoiman arvot
% kunkin elementin sisalla njako tasavalein sijaitsevassa
% pisteessa.
% Ulostuloparametrit:
% X koordinaattitaulukko
% V taipumataulukko
% M taivutusmomenttitaulukko
% Q leikkausvoimatulukko
% Sisaanmenoparametrit:
% njako pisteiden lukumaara
% nele elementtien lukumaara
% nosol elementtien systeemisolmunumerotaulukko
% novap elementtien systeemivapausastenumerotaulukko
% solkoo solmujen koordinaattitaulukko
% elom elementtiominaisuustaulukko
% a systeemivapausastetaulukko

function [X,V,M,Q]=lasele(njako,nele,nosol,novap,solkoo,elom,a);
for iele=1:nele
    B=elom(iele,1);
    S=elom(iele,2);
    q0=elom(iele,3);
    i1=nosol(iele,1);
    i2=nosol(iele,2);
    x1=solkoo(i1);
    x2=solkoo(i2);
    L=x2-x1;
    i1=novap(iele,1);
    i2=novap(iele,2);
    i3=novap(iele,3);
    i4=novap(iele,4);
    a1=a(i1);
    a2=a(i2);
    a3=a(i3);

```

```

    a4=a(i4);
    kap=12*B/(S*L^2);
    for ip=1:njako+1
        X(iele,ip)=x1+(ip-1)*L/njako;
        x=(X(iele,ip)-x1)/L; % HUOM! x on x/L
        V1=B/(L^2*(1+kap))*(12/L*a1+6*a2-12/L*a3+6*a4)-1/2*q0*L;
        M1=B/(L^2*(1+kap))*(6*a1+(4+kap)*L*a2-6*a3+(2-kap)*L*a4)-
            1/12*q0*L^2;
        v=-1/B*(1/2*M1*L^2*x^2-1/24*q0*L^4*x^4-1/6*V1*L^3*x^3)...
            +a2*L*x+1/S*(-V1*L*x-1/2*q0*L^2*x^2)+a1;
        m=M1-1/2*q0*L^2*x^2-V1*L*x;
        q=-V1-q0*L*x;
        V(iele,ip)=v;
        M(iele,ip)=m;
        Q(iele,ip)=q;
    end
end

% Elementtimatriisin muodostaja-aliohjelma MUOKE:
% -----
% ke=MUOKE(iele,nosol,solkoo,elom)
% Muodostaa elementtimatriisin palkkielementille.
% Ulostuloparametrit:
% ke      elementtimatriisin sailytystaulukko
% Sisaanmenoparametrit:
% iele    ko. elementin numero
% nosol   elementtien systeemisolmunumerotaulukko
% solkoo  solmujen koordinaattitaulukko
% elom    elementtiominaisuustaulukko

function ke=muoke(iele,nosol,solkoo,elom);
il=nosol(iele,1);
i2=nosol(iele,2);
L=solkoo(i2)-solkoo(i1);
B=elom(iele,1);
S=elom(iele,2);
kap=12*B/(S*L^2);
A=(4+kap)*L^2*B/(L^3*(1+kap));
B1=(2-kap)*L^2*B/(L^3*(1+kap));
C=6*L*B/(L^3*(1+kap));
D=12*B/(L^3*(1+kap));
ke=[D C -D C;
    C A -C B1;
    -D -C D -C;
    C B1 -C A];

% Elementtivektorin muodostaja-aliohjelma MUORE:
% -----
% re=MUORE(iele,nosol,solkoo,elom)
% Muodostaa puolisuunnikaskuormasta, jonka maarittelevat
% intensiteetit q1 ja q2 elementin paissa, seka alkukayristymasta
% kap0 aiheutuvan elementtivektorin palkkielementille.

```



```

% Ulostuloparametrit:
% re      elementtimatriisin säilytystaulukko
% Sisaanmenoparametrit:
% iele    ko. elementin numero
% nosol   elementtien solmunumerotaulukko
% solkoo  solmujen koordinaattitaulukko
% elom    elementtiominaisuustaulukko

function re=muore(iele,nosol,solkoo,elom);
il=nosol(iele,1);
i2=nosol(iele,2);
L=solkoo(i2)-solkoo(i1);
q=elom(iele,3);
re(1)=q*L/2;
re(2)=q*L^2/12;
re(3)=q*L/2;
re(4)=-q*L^2/1

```

Liite 6A: Kehät huomioiva taipumien laskentaohjelma

```
% Taipumien laskemiseen kehitetty ohjelma TAI:
% -----
% Ohjelma TAI laskee taipumat pistekuormista Timoshenko palkille,
joka
% on tuettu kuormituspisteistään jousilla. Ohjelma toimii
% voimamenetelmän periaatteella ja käyttää apuna aliohjelmaa
TAIPUMAT.
% Ulostuloparametrit:
% v taipumat
% Sisäänmenoparametrit:
% n kuormituspisteiden lukumäärä tukireaktiot mukaan luettuna
% x kuormituspisteiden sijaintikoordinaatit tukireaktiot mukaan
luettuna
% L palkin pituus
% l kuormituspisteiden välit
% B taivutusjäykkyys
% S leikkausjäykkyys
% P kuormat
% k jousitukien joustavuus

% Esimerkki 3 (luku 8.2)
n=9; % Pilareiden lukumäärä tuulen puoleisella
sivulla
A=1000; % Profiilin kourun poikkileikkausala mm2
br=20000; % Levyn pituus poimujen suunnassa
c=0.0672; % Jäykisteen joustavuus
E=207; % Kimmokerroin
x=[0 4500 9000 13500 18000 22500 27000 31500 36000];
% Pilareiden sijaintikoordinaatit
L=x(n); % Rakennuksen pituus
for i=1:n-1
    l(i)=x(i+1)-x(i);
end
alf3=1;
B=E*A*br^2/(2*alf3)*[1 1 1 1 1 1 1 1]; % Taivutusjäykkyys
S=l/c; % Leikkausjäykkyys
q=2.45; % Kuorma
P=[q*2.25 q*4.5 q*4.5 q*4.5 q*4.5 q*4.5 q*4.5 q*4.5 q*2.25];
% Pilareille tulvat pistekuormat
k=[0 1/2.64 1/2.64 1/2.64 1/2.64 1/2.64 1/2.64 1/2.64 0];
v0=zeros(1,n);
v0=taipumat(n,x,L,l,B,S,P);
for j=2:n-1;
    Papu=zeros(1,n);
    Papu(j)=-1;
    vapu=taipumat(n,x,L,l,B,S,Papu);
    vtaul(:,j)=vapu;
end
```

```

A=zeros(n);
b=zeros(n,1);
A(1,1)=1;
A(n,n)=1;
for i=2:n-1
    for j=2:n-1
        if i==j
            A(i,j)=-vtaul(i,j)+1/k(i);
        else
            A(i,j)=-vtaul(i,j);
        end
    end
end
for i=2:n-1
    b(i)=v0(i);
end
X=A\b;
Papu=P-X';
v=zeros(1,n);
v=taipumat(n,x,L,l,B,S,Papu);

% Taipumien laskemiseen kehitetty aliohjelma TAIPUMAT:
% -----
%   Aliohjelma   v=taipumat(n,x,L,l,B,S,P)   laskee   annetuista
pistekuormista
% taipumat kaksitukisella Timoshenko palkilla.
% Ulostuloparametrit:
% v taipumat
% Sisäänmenoparametrit:
% n kuormituspisteiden lukumäärä tukireaktiot mukaan luettuna
% x kuormituspisteiden sijaintikoordinaatit tukireaktiot mukaan
luettuna
% L palkin pituus
% l kuormituspisteiden välit
% B taivutusjäykkyys
% S leikkausjäykkyys
% P kuormat

function v=taipumat(n,x,L,l,B,S,P);
Tl=0; % Tukireaktio vasemmassa reunassa
Tn=0; % Tukireaktio oikeassa reunassa
for i=1:n
    Tl=Tl+1/L*P(i)*(L-x(i));
    Tn=Tn+1/L*P(i)*x(i);
end
Q(1)=Tl-P(1); % Leikkausvoima vasemmassa reunassa
M(1)=0; % Momentti vasemmassa reunassa
for i=1:n-1
    Q(i+1)=Q(i)-P(i+1);
    M(i+1)=M(i)+Q(i)*(x(i+1)-x(i));
end
f(1)=0; % Apusuure f laskee fii:n arvon x1:ssä

```

```

for i=1:n-1
    f(i+1)=f(i)+(1/L)*(-l(i)*Q(i)/S(i)+l(i)*(L-
x(i+1))*(M(i)+M(i+1))/(2*B(i))+l(i)^2*(2*M(i)+M(i+1))/(6*B(i)));
end
fii(1)=f(n);
% Varsinainen fii laskee fii:n arvon kaikissa pisteissä
for i=1:n-1
    fii(i+1)=fii(i)-l(i)*(M(i)+M(i+1))/(2*B(i));
end
v(1)=0; % Taipuma
for i=1:n-1
    v(i+1)=v(i)+fii(i)*l(i)+l(i)*Q(i)/S(i)-
l(i)^2*(2*M(i)+M(i+1))/(6*B(i));
end

```

Liite 6B: Likiratkaisu kehien vaikutuksen arvioimiseksi levyjäykistetyin katon siirtymiin

Kimmoisalla alustalla olevan Timoshenko palkin yhtälöt ovat

$$v' = \varphi + \gamma, \quad (1)$$

$$M = -B\varphi', \quad (2)$$

$$Q = S\gamma, \quad (3)$$

$$Q' + q - kv = 0, \quad (4)$$

$$M' = Q. \quad (5)$$

Yhtälöistä (1), (2) ja (5) seuraa

$$Q = M' = -B\varphi'' = -B(v''' - \gamma''). \quad (6)$$

Sijoittamalla tämä yhtälöön (4) saadaan

$$Bv^{(4)} - B\gamma''' + kv = q. \quad (7)$$

Yhtälöistä (3) ja (4) seuraa

$$\gamma' = -\frac{q}{S} + \frac{k}{S}v. \quad (8)$$

Derivoimalla lauseke (8) kahdesti puolittain ja sijoittamalla saatu γ''' :n lauseke yhtälöön (7), saadaan taipumalle differentiaaliyhtälö

$$Bv^{(4)} - \frac{kB}{S}v'' + kv = q - \frac{B}{S}q''. \quad (9)$$

Tämän yhtälön homogeenisen osan

$$Bv^{(4)} - \frac{kB}{S}v'' + kv = 0 \quad (10)$$

yleinen ratkaisu tapauksessa, jossa

$$\frac{\sqrt{kB}}{2S} < 1 \quad (11)$$

voidaan esittää muodossa (Mikkola ja Ylinen, 1964 sekä Hetenyj, 1983)

$$\bar{v} = C_1 \cosh \alpha x \cos \beta(L-x) + C_2 \cosh \alpha(L-x) \cos \beta x + C_3 \sinh \alpha x \sin \beta(L-x) + C_4 \sinh \alpha(L-x) \sin \beta x, \quad (12)$$

missä

$$\alpha = \sqrt{\sqrt{\frac{k}{4B}} + \frac{k}{4S}}, \quad \beta = \sqrt{\sqrt{\frac{k}{4B}} - \frac{k}{4S}}. \quad (13)$$

Siinä tapauksessa, että jakautunut kuormitus $q(x)$ on polynomimuotoinen ja korkeintaan kolmatta astetta, voidaan helposti sijoittamalla nähdä, että yhtälön (9) yksityisratkaisu on

$$v_0(x) = \frac{q(x)}{k}. \quad (14)$$

Seuraavassa voidaan rajoittua tasaisen kuorman $q = q_0 = \text{vakio}$ tapaukseen. Täydellisen yhtälön yleinen ratkaisu on homogeeniyhtälön yleisen ratkaisun ja täydellisen yhtälön yksityisratkaisun summa, joten taipumalle saadaan lopullinen lauseke

$$v(x) = C_1 \cosh \alpha x \cos \beta(L-x) + C_2 \cosh \alpha(L-x) \cos \beta x + C_3 \sinh \alpha x \sin \beta(L-x) + C_4 \sinh \alpha(L-x) \sin \beta x + \frac{q_0}{k} \quad (15)$$

Derivoimalla saadaan tästä

$$\begin{aligned} v'(x) = & C_1 (\beta \cosh \alpha x \sin \beta(L-x) + \alpha \sinh \alpha x \cos \beta(L-x)) + \\ & + C_2 (-\beta \cosh \alpha(L-x) \sin \beta x - \alpha \sinh \alpha(L-x) \cos \beta x) + \\ & + C_3 (-\beta \sinh \alpha x \cos \beta(L-x) + \alpha \cosh \alpha x \sin \beta(L-x)) + \\ & + C_4 (\beta \sinh \alpha(L-x) \cos \beta x - \alpha \cosh \alpha(L-x) \sin \beta x) \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} v''(x) = & C_1 ((\alpha^2 - \beta^2) \cosh \alpha x \cos \beta(L-x) + 2\alpha\beta \sinh \alpha x \sin \beta(L-x)) + \\ & + C_2 ((\alpha^2 - \beta^2) \cosh \alpha(L-x) \cos \beta x + 2\alpha\beta \sinh \alpha(L-x) \sin \beta x) + \\ & + C_3 ((\alpha^2 - \beta^2) \sinh \alpha x \sin \beta(L-x) - 2\alpha\beta \cosh \alpha x \cos \beta(L-x)) + \\ & + C_4 ((\alpha^2 - \beta^2) \sinh \alpha(L-x) \sin \beta x - 2\alpha\beta \cosh \alpha(L-x) \cos \beta x) \end{aligned} \quad (17)$$

Liukuman derivaatalle saadaan

$$\begin{aligned}
\gamma' &= -\frac{q_0}{S} + \frac{k}{S} v \\
&= C_1 \frac{k}{S} \cosh \alpha x \cos \beta(L-x) + C_2 \frac{k}{S} \cosh \alpha(L-x) \cos \beta x + \\
&\quad + C_3 \frac{k}{S} \sinh \alpha x \sin \beta(L-x) + C_4 \frac{k}{S} \sinh \alpha(L-x) \sin \beta x.
\end{aligned} \tag{18}$$

Taivutusmomentille saadaan

$$\begin{aligned}
M &= -B\varphi' = -B(v'' - \gamma') \\
&= -B(C_1((\alpha^2 - \beta^2 - \frac{k}{S}) \cosh \alpha x \cos \beta(L-x) + 2\alpha\beta \sinh \alpha x \sin \beta(L-x)) + \\
&\quad + C_2((\alpha^2 - \beta^2 - \frac{k}{S}) \cosh \alpha(L-x) \cos \beta x + 2\alpha\beta \sinh \alpha(L-x) \sin \beta x) + \\
&\quad + C_3((\alpha^2 - \beta^2 - \frac{k}{S}) \sinh \alpha x \sin \beta(L-x) - 2\alpha\beta \cosh \alpha x \cos \beta(L-x)) + \\
&\quad + C_4((\alpha^2 - \beta^2 - \frac{k}{S}) \sinh \alpha(L-x) \sin \beta x - 2\alpha\beta \cosh \alpha(L-x) \cos \beta x))
\end{aligned} \tag{19}$$

Kaksitukinen palkki

Reunaehdot ovat

$$v(0) = 0, \quad v(L) = 0, \quad M(0) = 0 \quad \text{ja} \quad M(L) = 0 \tag{20}$$

Ottamalla huomioon reunaehdot (20) saadaan integrointivakioille

$$C_1 = \frac{-q_0}{k(\cos \beta L + \cosh \alpha L)} = C_2 \quad \text{ja}$$

$$C_4 = -(\alpha^2 - \beta^2 - \frac{k}{S}) \left(\frac{q_0}{k 2\alpha\beta(\cos \beta L + \cosh \alpha L)} \right) = C_3$$

Sijoitetaan ne lausekkeeseen (15) ja saadaan

$$\begin{aligned}
v(x) &= \frac{q_0}{k} \left(\frac{-1}{(\cos \beta L + \cosh \alpha L)} (\cosh \alpha x \cos \beta(L-x) + \cosh \alpha(L-x) \cos \beta x) + \right. \\
&\quad \left. - (\alpha^2 - \beta^2 - \frac{k}{S}) \left(\frac{1}{2\alpha\beta(\cos \beta L + \cosh \alpha L)} (\sinh \alpha x \sin \beta(L-x) + \sinh \alpha(L-x) \sin \beta x) + 1 \right) \right)
\end{aligned} \tag{21}$$

Ottamalla vielä käyttöön lyhennysmerkintä $x' = L - x$, saadaan taipumalle tulos

$$v(x) = \frac{q_0}{k} \left(1 - \frac{1}{2\alpha\beta(\cos \beta L + \cosh \alpha L)} (2\alpha\beta(\cosh \alpha x \cos \beta x' + \cosh \alpha x' \cos \beta x) + (\alpha^2 - \beta^2 - \frac{k}{S})(\sinh \alpha x \sin \beta x' + \sinh \alpha x' \sin \beta x)) \right) \quad (22)$$

Ulokepalkki

Reunaehdojen käsittelyä varten tarvitaan tässä myös leikkausvoiman lauseketta. Sille saadaan

$$\begin{aligned} Q \equiv M' = & -B(C_1((3\alpha^2 - \beta^2 - \frac{k}{S})\beta \cosh \alpha x \sin \beta(L-x) + (\alpha^2 - 3\beta^2 - \frac{k}{S})\alpha \sinh \alpha x \cos \beta(L-x)) + \\ & + C_2(-(3\alpha^2 - \beta^2 - \frac{k}{S})\beta \cosh \alpha(L-x) \sin \beta x - (\alpha^2 - 3\beta^2 - \frac{k}{S})\alpha \sinh \alpha(L-x) \cos \beta x) + \\ & + C_3(-(3\alpha^2 - \beta^2 - \frac{k}{S})\beta \sinh \alpha x \cos \beta(L-x) + (\alpha^2 - 3\beta^2 - \frac{k}{S})\alpha \cosh \alpha x \sin \beta(L-x)) + \\ & + C_4((3\alpha^2 - \beta^2 - \frac{k}{S})\beta \sinh \alpha(L-x) \cos \beta x - (\alpha^2 - 3\beta^2 - \frac{k}{S})\alpha \cosh \alpha(L-x) \sin \beta x)). \end{aligned} \quad (23)$$

Reunaehdot ovat

$$v(0) = 0, \quad \varphi(0) = 0, \quad Q(L) = 0 \quad \text{ja} \quad M(L) = 0. \quad (24)$$

Ottamalla huomioon reunaehdot (24) saadaan integrointivakioille C_1 ja C_2 lausekkeet

$$C_1 = \frac{\frac{kd}{4S\alpha\beta} co + \left[\alpha^2(1 - \frac{\sqrt{kB}}{S}) - \beta^2(1 + \frac{\sqrt{kB}}{S}) \right] chshsi + \alpha\beta(1 - \frac{\sqrt{kB}}{S}) co(sh^2 + si^2)}{\frac{kd}{4S\alpha\beta} (ch^2 - co^2) - \alpha\beta \left[(1 + \frac{\sqrt{kB}}{S}) ch^2 + (1 - \frac{\sqrt{kB}}{S}) co^2 \right] (sh^2 + si^2)} \frac{q}{k} \quad (25)$$

ja

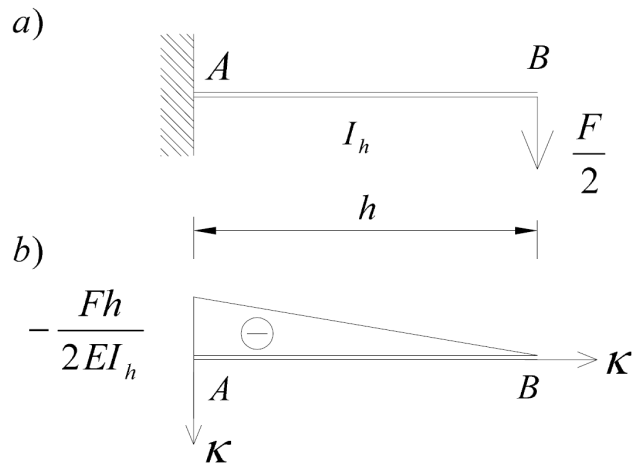
$$C_2 = - \left\{ \frac{\frac{kd}{4S\alpha\beta} ch + \left[\alpha^2(1 - \frac{\sqrt{kB}}{S}) - \beta^2(1 + \frac{\sqrt{kB}}{S}) \right] shsico - \alpha\beta(1 + \frac{\sqrt{kB}}{S}) ch(sh^2 + si^2)}{\frac{kd}{4S\alpha\beta} (ch^2 - co^2) - \alpha\beta \left[(1 + \frac{\sqrt{kB}}{S}) ch^2 + (1 - \frac{\sqrt{kB}}{S}) co^2 \right] (sh^2 + si^2)} \right\} \frac{q_0}{k}. \quad (26)$$

Palkin maksimitaipuma on ulokkeen päässä ja sille saadaan

$$\begin{aligned}
 v_{\max} &= v(L) = C_1 ch + C_2 co + \frac{q_0}{k} \\
 &= \left\{ 1 + \frac{\left[\alpha^2 \left(1 - \frac{\sqrt{kB}}{S} \right) - \beta^2 \left(1 + \frac{\sqrt{kB}}{S} \right) \right] (ch^2 - co^2) shsi + 2\alpha\beta co ch (sh^2 + si^2)}{\frac{kd}{4S\alpha\beta} (ch^2 - co^2) - \alpha\beta \left[\left(1 + \frac{\sqrt{kB}}{S} \right) ch^2 + \left(1 - \frac{\sqrt{kB}}{S} \right) co^2 \right] (sh^2 + si^2)} \right\} \frac{q_0}{k}.
 \end{aligned}
 \tag{27}$$

Liite 6C: Kehien jousivakioiden johtaminen

Taulukon 6.1 ensimmäinen tapaus muodostuu kahdesta ulokepilarista, joiden yläpää on kytketty toisiinsa nivelsauvalla. Kuva 1a esittää yhtä pilaria ja kuva 1b sen käristymäkuviota.



Kuva 1: Ulokekehän (a) pystysauva ja (b) sen käristymäkuviota

Ratkaistaan tehtävä momenttipintamenetelmällä. Käristymäpinnan momentille pisteen B suhteen saadaan

$$M_{AB} = \frac{1}{2}h \left(-\frac{Fh}{2EI_h} \right) \frac{2h}{3} = -\frac{1}{6} \frac{Fh^3}{EI_h}. \quad (1)$$

Momenttipintamenetelmän toinen kaava antaa

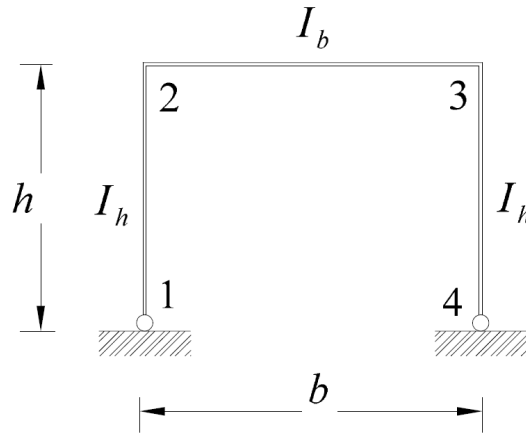
$$\overset{\delta}{v_B} - \overset{0}{v_A} = \overset{0}{\varphi_A}(x_B - x_A) - M_{AB} \quad (2)$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{1}{6} \frac{Fh^3}{EI_h}. \quad (3)$$

Jousivakion määrittelystä $\delta = F/k$ seuraa tulos

$$\Rightarrow \boxed{k = \frac{6EI_h}{h^3}}. \quad (4)$$

Taulukon 6.1 toinen tapaus on kaksinivelkehä (Kuva 2).



Kuva 2: Kaksinivelkehä

Ratkaistaan tehtävä kulmanmuutosmenetelmällä. Soveltamalla menetelmän perusyhtälöä (Loikkanen, 1975, s. 279) saadaan

$$M_{21} = \frac{3EI_h}{h} \varphi_2 - \frac{3EI_h}{h} \psi, \quad M_{32} = \frac{4EI_b}{b} \varphi_3 + \frac{2EI_b}{b} \varphi_2, \quad (5),(6)$$

$$M_{23} = \frac{4EI_b}{b} \varphi_2 + \frac{2EI_b}{b} \varphi_3, \quad M_{34} = \frac{3EI_h}{h} \varphi_3 - \frac{3EI_h}{h} \psi. \quad (7),(8)$$

Nurkan 2 momenttitasapainoyhtälöstä

$$M_{21} + M_{23} = 0 \quad (9)$$

seuraa

$$\left(\frac{3EI_h}{h} + \frac{4EI_b}{b}\right)\varphi_2 + \frac{2EI_b}{b}\varphi_3 - \frac{3EI_h}{h}\psi = 0. \quad (10)$$

Symmetrian takia $\varphi = \varphi_2 = \varphi_3$, joten yhtälöstä (10) saadaan

$$\left(\frac{3EI_h}{h} + \frac{6EI_b}{b}\right)\varphi - \frac{3EI_h}{h}\psi = 0. \quad (11)$$

Kehän siirtymäyhtälöstä

$$M_{21}\psi + M_{34}\psi + F\psi h = 0 \quad (12)$$

seuraa

$$\frac{3EI_h}{h}(\varphi_2 - \psi + \varphi_3 - \psi) = -Fh. \quad (13)$$

Ottamalla huomioon symmetriaehto $\varphi = \varphi_2 = \varphi_3$ saadaan tästä

$$\frac{6EI_h}{h}(\varphi - \psi) = -Fh, \quad (14)$$

Yhtälöparin (11) ja (14) ratkaisuna saadaan

$$\psi = \left(\frac{I_h}{h} + \frac{2I_b}{b}\right) \frac{Fbh^2}{12EI_h I_b}, \quad (15)$$

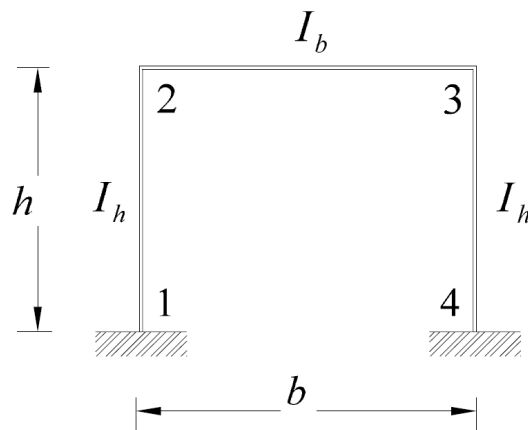
joten siirtymä δ on

$$\delta = \psi h = \left(\frac{I_h}{h} + \frac{2I_b}{b}\right) \frac{Fbh^3}{12EI_h I_b}. \quad (16)$$

Jousivakion k määrittelystä $\delta = F/k$ seuraa tulos

$$\Rightarrow k = \frac{6EI_h}{h^3} \frac{1}{1 + \frac{I_h b}{2I_b h}}. \quad (17)$$

Taulukon 6.1 kolmas tapaus on jäykkäkantainen kehä (Kuva 3).



Ratkaistaan tehtävä kulmanmuutosmenetelmällä. Soveltamalla menetelmän perusyhtälöä ja ottamalla huomioon, että kiertymät φ_1 ja φ_4 ovat nollia, saadaan

$$M_{12} = \frac{2EI_h}{h} \varphi_2 - \frac{6EI_h}{h} \psi, \quad M_{21} = \frac{4EI_h}{h} \varphi_2 - \frac{6EI_h}{h} \psi, \quad (18),(19)$$

$$M_{23} = \frac{4EI_b}{b} \varphi_2 + \frac{2EI_b}{b} \varphi_3, \quad M_{32} = \frac{4EI_b}{b} \varphi_3 + \frac{2EI_b}{b} \varphi_2, \quad (20),(21)$$

$$M_{34} = \frac{4EI_h}{h} \varphi_3 - \frac{6EI_h}{h} \psi, \quad M_{43} = \frac{2EI_h}{h} \varphi_3 - \frac{6EI_h}{h} \psi. \quad (22),(23)$$

Nurkan 2 momenttitasapainoyhtälöstä

$$M_{21} + M_{23} = 0 \quad (24)$$

seuraa

$$\left(\frac{4EI_h}{h} + \frac{4EI_b}{b}\right)\varphi_2 + \frac{2EI_b}{b} \varphi_3 - \frac{6EI_h}{h} \psi = 0. \quad (25)$$

Symmetrian takia $\varphi = \varphi_2 = \varphi_3$, joten edellisestä saadaan

$$\left(\frac{4EI_h}{h} + \frac{6EI_b}{b}\right)\varphi - \frac{6EI_h}{h} \psi = 0. \quad (26)$$

Kehän siirtymäyhtälöstä

$$M_{12}\psi + M_{21}\psi + M_{34}\psi + M_{43}\psi + F\psi h = 0 \quad (27)$$

seuraa

$$\frac{6EI_h}{h} \varphi_2 + \frac{6EI_h}{h} \varphi_3 - \frac{24EI_h}{h} \psi + Fh = 0. \quad (28)$$

Ottamalla huomioon siirtymäehto $\varphi = \varphi_2 = \varphi_3$ saadaan tästä

$$\frac{12EI_h}{h} \varphi - \frac{24EI_h}{h} \psi = -Fh, \quad (29)$$

Yhtälöparin (26) ja (29) ratkaisuna saadaan

$$\psi = \frac{Fh^2}{12EI_h} \frac{3 + \frac{2I_b b}{I_h h}}{6 + \frac{I_h b}{I_b h}} \quad (30)$$

joten siirtymä δ on

$$\delta = \psi h = \frac{Fh^3}{12EI_h} \frac{3 + \frac{2I_h b}{I_b h}}{6 + \frac{I_h b}{I_b h}}. \quad (31)$$

Jousivakion k määrittelystä $\delta = F/k$ seuraa tulos

$$\Rightarrow k = \frac{24EI_h}{h^3} \frac{1 + \frac{I_h b}{6I_b h}}{1 + \frac{2I_h b}{3I_b h}}. \quad (32)$$

Liite 7A: Elementtiohjelman lähtötieto-ohjelma

```
% Luvussa 7.3 esitetyn rakenteen lähtötietotiedosto
% -----
% Lukumäärät
nsyvap=42;
nsysol=23;
nele=26;
nanv=0;
nank=14;
% Kuorma
P=5.5125;
% Rakennuksen leveys
leveys=20000;
% Jäykkyydet
% - kehä
Bk=4.3346e+014;
Sk=3.1583e+003;
% - levy
Bl=4.1400e+013;
Sl=6.6964e+004;
% - ristikko
Br=6.9353e+013;
Sr=5.5511e+005;
% Solmujen koordinaatit
solkoo=zeros(nsysol,2);
solkoo=solgen(solkoo,1,[0 36000],[0 0],0,0,9,1);
solkoo=solgen(solkoo,10,[0 36000],[8000 8000],0,0,9,1);
solkoo=solgen(solkoo,19,[0 18000],[16000 16000],0,0,5,1);
% Elementtien systeemisolmunumerot
nosol=zeros(nele,2);
nosol(1,:)=[1 10];
nosol(2,:)=[2 11];
nosol(3,:)=[3 12];
nosol(4,:)=[4 13];
nosol(5,:)=[5 14];
nosol(6,:)=[6 15];
nosol(7,:)=[7 16];
nosol(8,:)=[8 17];
nosol(9,:)=[9 18];
nosol=elegen(nosol,10,[10 11],8,1,1,2);
nosol(18,:)=[10 19];
nosol(19,:)=[11 20];
nosol(20,:)=[12 21];
nosol(21,:)=[13 22];
nosol(22,:)=[14 23];
nosol=elegen(nosol,23,[19 20],4,1,1,2);
% Elementtien systeemivapausastenumerot
novap(1,:)=[0 0 1 19];
novap(2,:)=[0 0 2 20];
```

```

novap(3,:)= [0 0 3 21];
novap(4,:)= [0 0 4 22];
novap(5,:)= [0 0 5 23];
novap(6,:)= [0 0 6 24];
novap(7,:)= [0 0 7 25];
novap(8,:)= [0 0 8 26];
novap(9,:)= [0 0 9 27];
novap=elegen(novap,10,[1 10 2 11],8,1,1,4);
novap(18,:)= [1 19 28 38];
novap(19,:)= [2 20 29 39];
novap(20,:)= [3 21 30 40];
novap(21,:)= [4 22 31 41];
novap(22,:)= [5 23 32 42];
novap=elegen(novap,23,[28 33 29 34],4,1,1,4);
% Elementtien tyypit (r=ristikko, l=levy, k=kehä)
elty='rkkkkkkkrlllllllllrkkkrlllll';
% Elementtien suunnat (p=pystysuora, v=vaakasuora)
elsu='pppppppppvvvvvvvpppppvvvv';
% Elementtiominaisuudet
elom(1,:)= [Br Sr 0];
elom(2,:)= [Bk Sk 0];
elom(3,:)= [Bk Sk 0];
elom(4,:)= [Bk Sk 0];
elom(5,:)= [Bk Sk 0];
elom(6,:)= [Bk Sk 0];
elom(7,:)= [Bk Sk 0];
elom(8,:)= [Bk Sk 0];
elom(9,:)= [Br Sr 0];
for iele=10:17
elom(iele,:)= [Bl Sl 0];
end
elom(18,:)= [Br Sr 0];
elom(19,:)= [Bk Sk 0];
elom(20,:)= [Bk Sk 0];
elom(21,:)= [Bk Sk 0];
elom(22,:)= [Br Sr 0];
for iele=23:26
elom(iele,:)= [Bl Sl 0];
end
% Annetut vapausastekuormat
noank=[1 2 3 4 5 6 7 8 9 28 29 30 31 32];
ank=[2*P 4*P 4*P 4*P 3*P 2*P 2*P 2*P P P 2*P 2*P 2*P P];

```


Liite 7B: Elementtiohjelman esikäsittelyohjelma

```
% Jäykiste-elementtiohjelman esikäsittelija ESI:
% -----
% Ohjelmaa on dokumentoitu joillakin kommenttiriveillä, joiden
% avulla sen toiminnasta voi haluttaessa ottaa selvää.
%
% Määritetään vapausastenuolten pituus
nuopit=leveys/3;
%
% Piirretään solmut
%
figure
for iele=1:nele
    i1=nosol(iele,1);
    i2=nosol(iele,2);
    x1=solkoo(i1,1);
    x2=solkoo(i2,1);
    z1=solkoo(i1,2);
    z2=solkoo(i2,2);
    if elty(iele)=='r'
        x=[x1 x2 x2 x1 x1 x2 x2 x1];
        y=leveys/2*[-1 -1 1 1 -1 1 -1 1];
        z=[z1 z2 z2 z1 z1 z2 z2 z1];
        kahva=plot3(x,y,z,'g');
        set(kahva,'LineWidth',2)
    elseif elty(iele)=='l'
        x=[x1 x2 x2 x1 x1];
        y=leveys/2*[-1 -1 1 1 -1];
        z=[z1 z2 z2 z1 z1];
        kahva=fill3(x,y,z,'y');
        set(kahva,'LineWidth',2)
    elseif elty(iele)=='k'
        x=[x1 x2 x2 x1 x1];
        y=leveys/2*[-1 -1 1 1 -1];
        z=[z1 z2 z2 z1 z1];
        kahva=plot3(x,y,z,'b');
        set(kahva,'LineWidth',2)
    else
        'Väärä eltyp'
    end
end
hold on
end
for isol=1:nsysol;
    kahva=plot3(solkoo(isol,1),0,solkoo(isol,2));

set(kahva,'Marker','o','MarkerFaceColor','r','MarkerSize',7,'Color',
    'k')
    kahva=text(solkoo(isol,1),0,solkoo(isol,2),num2str(isol),...
        'VerticalAlignment','bottom','HorizontalAlignment','left');
```

```

        set(kahva,'FontSize',10)
        hold on
    end
    axis equal
    title('Solmut')
    pause
    %
    % Piirretään elementit
    %
    figure
    for iele=1:nele
        i1=nosol(iele,1);
        i2=nosol(iele,2);
        x1=solkoo(i1,1);
        x2=solkoo(i2,1);
        z1=solkoo(i1,2);
        z2=solkoo(i2,2);
        if elty(iele)=='r'
            x=[x1 x2 x2 x1 x1 x2 x2 x1];
            y=leveys/2*[-1 -1 1 1 -1 1 -1 1];
            z=[z1 z2 z2 z1 z1 z2 z2 z1];
            kahva=plot3(x,y,z,'g');
            set(kahva,'LineWidth',2)
        elseif elty(iele)=='l'
            x=[x1 x2 x2 x1 x1];
            y=leveys/2*[-1 -1 1 1 -1];
            z=[z1 z2 z2 z1 z1];
            kahva=fill3(x,y,z,'y');
            set(kahva,'LineWidth',2)
        elseif elty(iele)=='k'
            x=[x1 x2 x2 x1 x1];
            y=leveys/2*[-1 -1 1 1 -1];
            z=[z1 z2 z2 z1 z1];
            kahva=plot3(x,y,z,'b');
            set(kahva,'LineWidth',2)
        else
            'Väärä eltyp'
        end
        kahva=text((x1+x2)/2,0,(z1+z2)/2,num2str(iele),...
            'VerticalAlignment','bottom','HorizontalAlignment','left');
        set(kahva,'FontSize',10)
        hold on
    end
    axis equal
    title('Elementit')
    pause
    %
    % Piirretään systeemivapausasteet
    %
    figure
    for iele=1:nele
        i1=nosol(iele,1);

```

```

i2=nosol(iele,2);
x1=solkoo(i1,1);
x2=solkoo(i2,1);
z1=solkoo(i1,2);
z2=solkoo(i2,2);
if elty(iele)=='r'
    x=[x1 x2 x2 x1 x1 x2 x2 x1];
    y=leveys/2*[-1 -1 1 1 -1 1 -1 1];
    z=[z1 z2 z2 z1 z1 z2 z2 z1];
    kahva=plot3(x,y,z,'k');
    set(kahva,'LineWidth',2)
elseif elty(iele)=='l'
    x=[x1 x2 x2 x1 x1];
    y=leveys/2*[-1 -1 1 1 -1];
    z=[z1 z2 z2 z1 z1];
    kahva=plot3(x,y,z,'k');
    set(kahva,'LineWidth',2)
elseif elty(iele)=='k'
    x=[x1 x2 x2 x1 x1];
    y=leveys/2*[-1 -1 1 1 -1];
    z=[z1 z2 z2 z1 z1];
    kahva=plot3(x,y,z,'k');
    set(kahva,'LineWidth',2)
else
    'Väärä eltyp'
end
hold on
end
% Määritetään vapausasteita vastaavien solmujen numerot
[novaso]=lasvaso(nsyvap,nele,elsu,novap,nosol);
for ivap=1:nsyvap
    isol=novaso(ivap,1);
    isov=novaso(ivap,2);
    xsol=solkoo(isol,1);
    zsol=solkoo(isol,2);
    % kahva=plot3(xsol,0,zsol);
    %
    set(kahva,'Marker','o','MarkerFaceColor','w','MarkerSize',7,'Color',
    'r')
    if isov==1
        kahva=plot3([xsol xsol],[0 nuopit],[zsol zsol],'r');
        set(kahva,'LineWidth',4)
        kahva=text(xsol,0,zsol,num2str(ivap),...
        'VerticalAlign-
ment','bottom','HorizontalAlignment','right');
        set(kahva,'FontSize',10)
    end
    if isov==2
        kahva=plot3([xsol xsol],[0 0],[zsol zsol+nuopit],'b');
        set(kahva,'LineWidth',3)
        kahva=text(xsol,0,zsol,num2str(ivap),...

```

```

        'VerticalAlign-
ment','bottom','HorizontalAlignment','left');
        set(kahva,'FontSize',10)
    end
    if isov==3
        kahva=plot3([xsol xsol-nuopit],[0 0],[zsol zsol],'b');
        set(kahva,'LineWidth',3)
        kahva=text(xsol,0,zsol,num2str(ivap),...
            'VerticalAlign-
ment','top','HorizontalAlignment','left');
        set(kahva,'FontSize',10)
    end
    hold on
end
axis equal
title('Systeemivapausasteet')

```

Liite 7C: Elementtiohjelman pääohjelma

```
% Timoshenko palkkimalliin perustuva jäykistetyin
% rakennusrungon siirtymätilan määrittäsohjelma JAY:
% -----
% Ohjelma ratkaisee ristikko-, levy- ja kehäjäykistein
% jäykisteyn rakennuksen rungon siirtymätilan elementti-
% menetelmällä.
% Parametreja:
% nsyvap systeemivapausasteiden lukumaara
% nsysol systeemisolmujen lukumaara
% nele elementtien lukumaara
% nosol elementtien systeemisolmunumerotaulukko
% novap elementtien systeemivapausastenumerotaulukko
% nanv annettujen vapausasteiden lukumaara
% noanv annettujen vapausasteiden numerotaulukko
% anv annettujen vapausasteiden arvotaulukko
% nank annettujen vapausastekuormien lukumaara
% noank annettujen vapausastekuormien numerotaulukko
% ank annettujen vapausastekuormien arvotaulukko

% Maaritellaan systeemimatriisi ks harvaksi
ks=sparse(nsyvap,nsyvap);
% Nollataan systeemivektori rs
rs=zeros(nsyvap,1);
% Kootaan systeemimatriisi ks
ks=kokks(ks,nele,nsyvap,4,nosol,novap,solkoo,elom);
% Kootaan systeemivektori rs
rs=kokrs(rs,nele,nsyvap,4,nosol,novap,solkoo,elom);
% Huomioidaan annetut vapausasteet systeemimatriisissa ja
systeemivektorissa
if(nanv>0)[ks,rs]=anvap(ks,rs,nanv,noanv,anv);end
% Huomioidaan annetut vapausastekuormat systeemivektorissa
if(nank>0)rs=anvak(rs,nank,noank,ank);end
% Ratkaistaan yhtäloryhmä
a=ks\rs;
% Määritetään systeemivapausasteita vastaavat solmut
[novaso]=lasvaso(nsyvap,nele,elsu,novap,nosol);
```

Liite 7D: Elementtiohjelman aliohjelman

```
% Systeemimatriisin kokoaja-aliohjelman KOKKS:
% -----
% ks=KOKKS(ks,nele,nsyvap,nelvap,nosol,novap,solkoo,elom)
% Aliohjelma kokoaa systeemimatriisin ks elementtimatriisin ke
% alkioista, jotka
% aliohjelman muoke muodostaa elementti kerrallaan.
% Ulostuloparametri:
% ks systeemimatriisi kokoamisen jälkeen
% Sisaanmenoparametrit:
% ks systeemimatriisi ennen kokoamista
% nele elementtien lukumaara
% nsyvap systeemivapausasteiden lukumaara
% nelvap elementin vapausasteiden lukumaara
% nosol elementtien systeemisolmunumerotaulukko
% novap elementtien systeemivapausastenumerotaulukko
% solkoo solmujen koordinaattitaulukko
% elom elementtiominaisuustaulukko

function ks=kokks(ks,nele,nsyvap,nelvap,nosol,novap,solkoo,elom);
for iele=1:nele
    ke=muoke(iele,nosol,solkoo,elom);
    for ie=1:nelvap
        is=novap(iele,ie);
        if (is>0)
            for je=1:nelvap
                js=novap(iele,je);
                if (js>0)
                    ks(is,js)=ks(is,js)+ke(ie,je);
                end
            end
        end
    end
end

% Systeemivektorin kokoaja-aliohjelman KOKRS:
% -----
% rs=KOKRS(rs,nele,nsyvap,nelvap,nosol,novap,solkoo,elom)
% Aliohjelma kokoaa systeemivektorin rs elementtivektorin re
% alkioista, jotka
% aliohjelman muore muodostaa elementti kerrallaan.
% Ulostuloparametri:
% rs systeemivektori kokoamisen jälkeen
% Sisaanmenoparametrit:
% ks systeemivektori ennen kokoamista
% nele elementtien lukumaara
% nsyvap systeemivapausasteiden lukumaara
% nelvap elementin vapausasteiden lukumaara
% nosol elementtien systeemisolmunumerotaulukko
```

```

% novap elementtien systeemivapausastenumerotaulukko
% solkoo solmujen koordinaattitaulukko
% elom elementtiominaisuustaulukko

function rs=kokrs(rs,nele,nsyvap,nelvap,nosol,novap,solkoo,elom);
for iele=1:nele
    re=muore(iele,nosol,solkoo,elom);
    for ie=1:nelvap
        is=novap(iele,ie);
        if(is>0)
            rs(is)=rs(is)+re(ie);
        end
    end
end

% Vapausasteita vastaavien solmujen määrittelysohjelma LASVASO:
function [novaso]=lasvaso(nsyvap,nele,elsu,novap,nosol);
novaso=zeros(nsyvap,2);
for iele=1:nele
    is1=nosol(iele,1);
    is2=nosol(iele,2);
    iv1=novap(iele,1);
    iv2=novap(iele,2);
    iv3=novap(iele,3);
    iv4=novap(iele,4);
    if iv1>0
        novaso(iv1,:)=[is1 1];
    end
    if iv2>0
        if elsu(iele)=='v'
            novaso(iv2,:)=[is1 2];
        else
            novaso(iv2,:)=[is1 3];
        end
    end
    if iv3>0
        novaso(iv3,:)=[is2 1];
    end
    if iv4>0
        if elsu(iele)=='v'
            novaso(iv4,:)=[is2 2];
        else
            novaso(iv4,:)=[is2 3];
        end
    end
end
end

% Elementtimatriisin muodostaja-aliohjelma MUOKE:
% -----
% ke=MUOKE(iele,nosol,solkoo,elom)
% Muodostaa elementtimatriisin palkkielementille.
% Ulostuloparametrit:

```

```

% ke      elementtimatriisin sailytystaulukko
% Sisaanmenoparametrit:
% iele    ko. elementin numero
% nosol   elementtien systeemisolmunumerotaulukko
% solkoo  solmujen koordinaattitaulukko
% elom    elementtiominaisuustaulukko

function ke=muoke(iele,nosol,solkoo,elom);
il=nosol(iele,1);
i2=nosol(iele,2);
Lx=solkoo(i2,1)-solkoo(il,1);
Lz=solkoo(i2,2)-solkoo(il,2);
if Lx>Lz
    L=Lx;
else
    L=Lz;
end
B=elom(iele,1);
S=elom(iele,2);
kap=12*B/(S*L^2);
A=(4+kap)*L^2*B/(L^3*(1+kap));
B1=(2-kap)*L^2*B/(L^3*(1+kap));
C=6*L*B/(L^3*(1+kap));
D=12*B/(L^3*(1+kap));
ke=[D C -D C;
    C A -C B1;
    -D -C D -C;
    C B1 -C A];

% Elementtivektorin muodostaja-aliohjelma MUORE:
% -----
% re=MUORE(iele,nosol,solkoo,elom)
% Muodostaa puolisuunnikaskuormasta, jonka maarittelevat
% intensiteetit q1 ja q2 elementin paissa, seka alkukayristymasta
% kap0 aiheutuvan elementtivektorin palkkielementille.
% Ulostuloparametrit:
% re      elementtimatriisin sailytystaulukko
% Sisaanmenoparametrit:
% iele    ko. elementin numero
% nosol   elementtien solmunumerotaulukko
% solkoo  solmujen koordinaattitaulukko
% elom    elementtiominaisuustaulukko

function re=muore(iele,nosol,solkoo,elom);
il=nosol(iele,1);
i2=nosol(iele,2);
Lx=solkoo(i2,1)-solkoo(il,1);
Lz=solkoo(i2,2)-solkoo(il,2);
if Lx>Lz
    L=Lx;
else
    L=Lz;

```



```
end
q=elom(iele,3);
re(1)=q*L/2;
re(2)=q*L^2/12;
re(3)=q*L/2;
re(4)=-q*L^2/12;
```